FORMA POLAR Y FORMA TRIGONOMÉTRICA

La forma en que hasta este momento se han representado los números complejos se llama **forma binómica**; sin embargo, no es la única posible. Así, el número complejo $a+bi$ se puede escribir de otras dos formas que facilitan la realización de ciertas operaciones. Para ello, previamente se han de definir los conceptos de módulo y argumento de un número complejo.

El **módulo** o **valor absoluto** del número complejo $a+bi$ es la distancia del origen de coordenadas al punto (a, b) que representa al número complejo $a+bi$. Se denota $|a+bi|$.

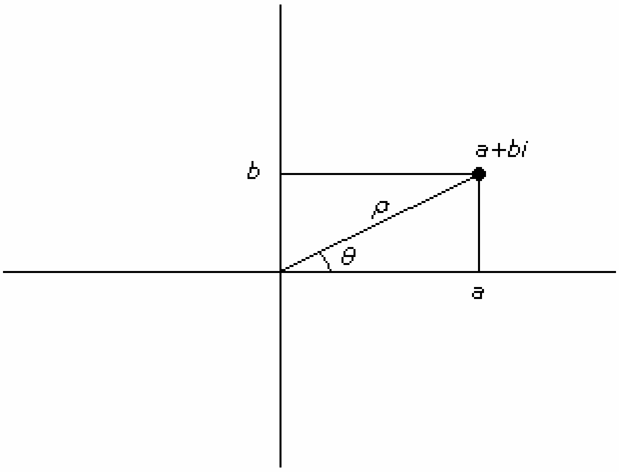
Aplicando el Teorema de Pitágoras, se obtiene que $|a+bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

El **argumento** de un número complejo $a+bi$ no nulo es el ángulo que forma el eje OX positivo con el vector que une el origen de coordenadas con el punto (a, b). Se denota $\arg(a+bi)$.

Aplicando trigonometría, se comprueba que $\arg(a+bi) = \text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$. (Ver Unidad Didáctica 3)

En esta Unidad Didáctica se considera que $0 \leq \arg(a+bi) < 2\pi$, aunque es igualmente válido considerar que el argumento está en cualquier otro intervalo de longitud 2π, por ejemplo, que se ha de verificar, $-\pi < \arg(a+bi) \leq \pi$.

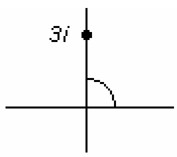
En la siguiente figura se muestran gráficamente el módulo y el argumento de un número complejo $a+bi$, que también es habitual denotarlos por ρ y θ, respectivamente.



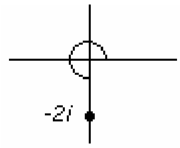
siendo $\rho = |a+bi|$ y $\theta = \arg(a+bi)$

Ejemplo 10:

a) El modulo de $3i$ es 3 y el argumento es $\frac{\pi}{2}$ como se observa en la figura.



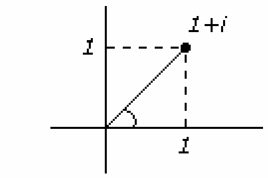
b) El módulo de $-2i$ es $|-2i| = 2$ y el argumento es $\arg(-2i) = \frac{3\pi}{2}$ como se observa en la figura.

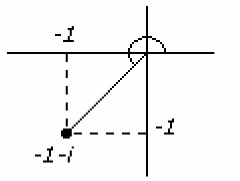


c) El módulo de $1+i$ es $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ y el argumento es $\arg(1+i) = \operatorname{arctg}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$

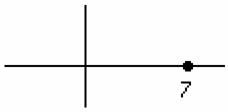
El módulo de $-1-i$ es $|-1-i| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ y el argumento es $\arg(-1-i) = \operatorname{arctg}\frac{-1}{-1} = \frac{5\pi}{4}$

Observar que los argumentos de los dos números complejos son iguales a arctg1, aunque toman diferente valor dependiendo del cuadrante en que se esté, como se observa en las siguientes figuras.





d) El módulo de 7 es $|7| = \sqrt{(7)^2} = \sqrt{49} = 7$ y el argumento es $\arg(7) = \operatorname{arctg}\frac{0}{7} = 0$



La **forma polar** de escribir el número complejo $a+bi$ es ρ_θ siendo ρ el módulo y θ el argumento de $a+bi$.

Ejemplo 11:

La forma polar de cada uno de los números complejos del ejemplo 10 es:

a) $3i = 3_{\pi/2}$

b) $-2i = 2_{3\pi/2}$

c) $1+i = \sqrt{2}_{\pi/4}$ $\qquad$ $-1-i = \sqrt{2}_{5\pi/4}$

d) $7 = 7_0$

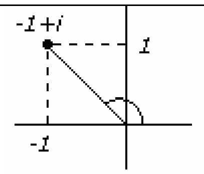
Aplicando conceptos de trigonometría (Unidad Didáctica 3), es inmediato deducir que dado un número complejo $a+bi$, su módulo ρ y su argumento θ el argumento, se cumple que $a = \rho\cos\theta$ y $b = \rho\operatorname{sen}\theta$, de donde surge la forma trigonomética de escribir un número complejo.

La **forma trigonométrica** de escribir el número complejo $a+bi$ es $\rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ siendo ρ el módulo y θ el argumento de $a+bi$.

Ejemplo 12:

a) Se calcula a continuación la forma polar y la forma trigonométrica del número complejo $-1+i$.

Para ello es necesario calcular su módulo y su argumento:

	$\rho = \lvert -1+i \rvert = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$ $\theta = \arg(-1+i) = \operatorname{arctg}\frac{1}{-1} = \frac{3\pi}{4}$

Por tanto, la forma polar es $\sqrt{2}_{3\pi/4}$ y la forma trigonométrica $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$.

b) Se calcula a continuación la forma binómica y la forma trigonométrica del número complejo 2_{π}.

Al estar dado en forma polar, es claro que su módulo es 2 y su argumento es π, por tanto, la forma trigonométrica es $2(\cos \pi + i \operatorname{sen}\pi)$ y operando se obtiene la forma binómica $2(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi) = 2(-1+i0) = -2$.

c) La forma binómica del número complejo $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+ i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$ se obtiene sin más que hacer cuentas:

$$\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+ i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\ (0+i1) = \sqrt{3}\, i$$

La forma polar es inmediata teniendo en cuenta que el módulo es $\sqrt{3}$ y el argumento es $\frac{\pi}{2}$, así el número complejo en forma polar es $\sqrt{3}_{\pi/2}$.