CONCEPTOS

Un **número complejo** es un número de la forma $a+bi$, donde a y b son números reales, llamados **parte real** y **parte imaginaria** respectivamente, e i es la **unidad imaginaria** que se define como $i = \sqrt{-1}$.

Esta forma de representar los números complejos se llama **forma binómica**.

OPERACIONES

Suma de números complejos

Dados dos números complejos se define su suma como otro número complejo cuya parte real es la suma de las partes reales y cuya parte imaginaria es la suma de las partes imaginarias.

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c)+(b+d)i$$

Ejemplo 4:

a) $(3-2i) + (4+5i) = (3+4)+(-2+5)i = 7+3i$

b) En la práctica es habitual no poner cada sumando entre paréntesis. Así, para sumar $4+\frac{1}{3}i$ y $\frac{3}{2}+\frac{2}{3}i$ se procede como sigue:

$$4+\frac{1}{3}i + \frac{3}{2}+\frac{2}{3}i = 4+\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)i = \frac{11}{2}+1i = \frac{11}{2}+i$$

Producto de números complejos

Dados dos números complejos $a+bi$ y $c+di$ su producto es otro número complejo de la forma

$$(a+bi).(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Ejemplo 5: $(3-2i).(4+7i) = (3.4-(-2)7) + (3.7+(-2)4)i = 26+13i$

En la práctica, el producto de dos números complejos se obtiene multiplicando las expresiones $a+bi$ y $c+di$ utilizando la propiedad distributiva y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$:

$$(a+bi).(c+di) = ac+adi+bic+bdi^2 = ac+adi+bci-bd = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Ejemplo 6:

a) $(3+i).4i = 12i + 4i^2 = 12i - 4 = -4 + 12i$

b) $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}i\right).(2+10i) = \frac{2}{3} + \frac{10}{3}i + \frac{4}{5}i + \frac{20}{5}i^2 = \frac{2}{3} - 4 + \left(\frac{10}{3}+\frac{4}{5}\right)i = \frac{-10}{3} + \frac{62}{15}i$

Ejemplo 7:

a) El elemento inverso de $5+7i$ es $\frac{5}{5^2+7^2} - \frac{7}{5^2+7^2}i = \frac{5}{74} - \frac{7}{74}i$

b) El elemento inverso de $\sqrt{3}i$ es $\frac{-\sqrt{3}}{3}i$

El hecho de que dado cualquier número complejo no nulo exista su elemento inverso permite definir la **división** en C como:

$$(a+bi):(c+di) = (a+bi).(c+di)^{-1} = (a+bi).\left(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i\right) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i, \quad \text{si } c+di \neq 0$$

En la practica, para calcular $(a+bi):(c+di) = \frac{a+bi}{c+di}$, basta multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador y realizar operaciones:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(-ad+bc)\,i}{(c^2+d^2)+(-cd+dc)\,i} = \frac{(ac+bd)+(-ad+bc)\,i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Este mismo proceso se puede utilizar para calcular el inverso de un número complejo no nulo, escribiéndolo de la forma $(a+bi)^{-1} = \frac{1}{a+bi}$ y realizando la división.

Ejemplo 8:

a. $(11+10i):(1+4i) = \frac{11+10i}{1+4i} = \frac{(11+10i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \frac{11-44i+10i-40i^2}{1-16i^2} = \frac{51-34i}{17} = 3-2i$

b. $(-3+7i)^{-1} = \frac{1}{-3+7i} = \frac{1(-3+7i)}{(-3+7i)(-3-7i)} = \frac{-3+7i}{9-49i^2} = \frac{-3+7i}{58} = \frac{-3}{58} + \frac{7}{58}i$