

HIPÉRBOLA

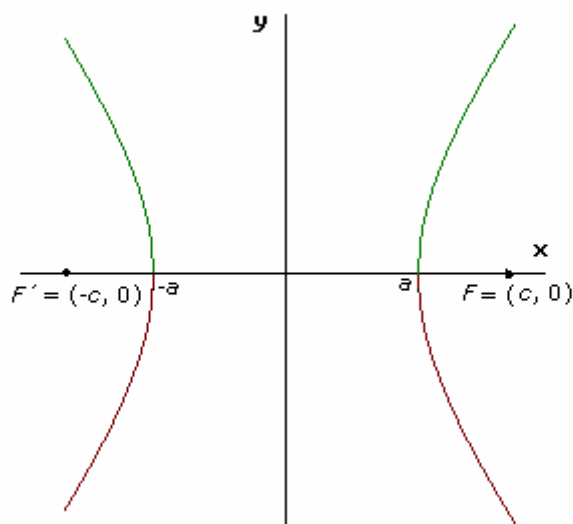
Una **hipérbola de focos F y F'** , puntos fijos del plano, es el conjunto de puntos cuya diferencia de distancias a los focos es igual a una constante.

Si la constante se representa por $2a$ y los focos se colocan en puntos del eje OX simétricos respecto del origen, $F = (c, 0)$ y $F' = (-c, 0)$, se obtiene la *ecuación reducida* de la hipérbola procediendo como sigue:

El punto $X = (x, y)$ del plano pertenecerá a la hipérbola si verifica $d(X, F) - d(X, F') = 2a$, es decir, si $\sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$.

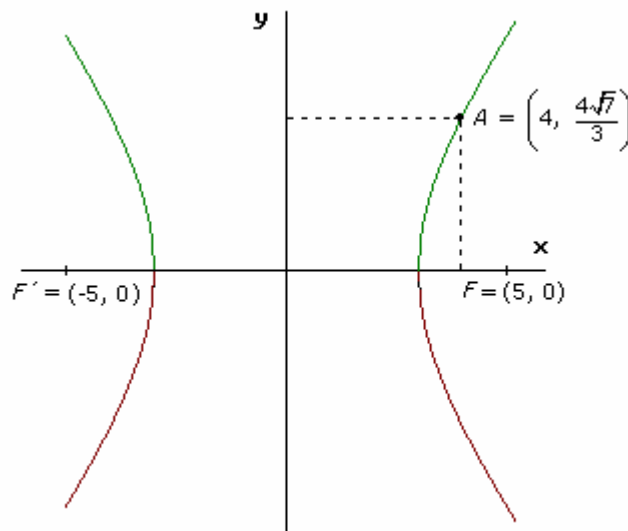
Realizando operaciones, se obtiene $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$ y denotando $c^2 - a^2 = b^2$ la ecuación de la

hipérbola se escribe $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$



Ejemplo 3:

Escribir la ecuación de la hipérbola de focos $F = (5, 0)$ y $F' = (-5, 0)$, que pasa por el punto $A = \left(4, \frac{4\sqrt{7}}{3}\right)$.



Considerando la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$, en este ejemplo se conoce $c = 5$ y se puede calcular a , ya que $2a$

$$= d(A, F') - d(A, F) = \sqrt{(4+5)^2 + \left(\frac{4\sqrt{7}}{3}\right)^2} - \sqrt{(4-5)^2 + \left(\frac{4\sqrt{7}}{3}\right)^2} = \sqrt{81 + \frac{112}{9}} - \sqrt{1 + \frac{112}{9}} = \sqrt{\frac{841}{9}} - \sqrt{\frac{121}{9}} = \frac{29}{3} - \frac{11}{3} =$$

$$= \frac{18}{3} = 6. \text{ De ahí que } a = 3, \text{ y por tanto la ecuación de la hipérbola es } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25-9} = 1, \text{ es decir, } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

De las hipérbolas cuyos focos no están en el eje OX o no son simétricos respecto al origen merece la pena señalar aquellas cuya ecuación es de la forma $x \cdot y = k$. Teniendo en cuenta el signo de k , se deduce que para $k < 0$ la hipérbola está en el segundo y cuarto cuadrante, para $k > 0$ la hipérbola está en el primer y tercer cuadrante y para $k = 0$ la hipérbola viene representada por los ejes de coordenadas y se denomina hipérbola degenerada.

Ejemplo 4: La representación de la hipérbola de ecuación $x \cdot y = 1$ es:

