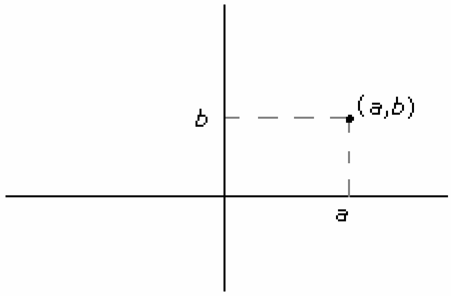
Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

PUNTOS Y VECTORES EN EL PLANO

PUNTOS EN EL PLANO

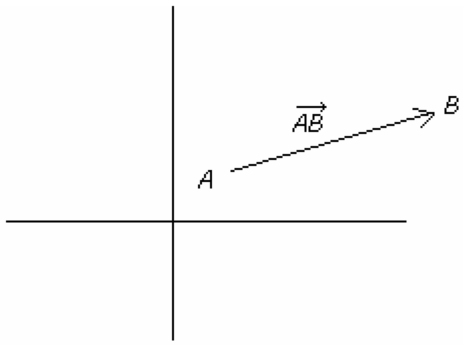
Tomando como referencia los *ejes cartesianos* del plano, un punto se representa mediante un par ordenado (a, b) de números reales, es decir, mediante un elemento del producto cartesiano R por R.

El número a se llama **abscisa** y se representa en el eje horizontal y el número b se llama **ordenada** y se representa en el eje vertical. El punto de intersección de las paralelas a los ejes que pasan por a y b respectivamente, representa al punto (a, b). Los números a y b se denominan **coordenadas cartesianas** del punto (a, b).



VECTORES FIJOS

Un **vector fijo** en el plano es un segmento orientado con origen en un punto A y extremo en un punto B, se denota $\overrightarrow{AB}$.



En el caso de que el origen y el extremo coincidan, se dice que el vector es **nulo**.

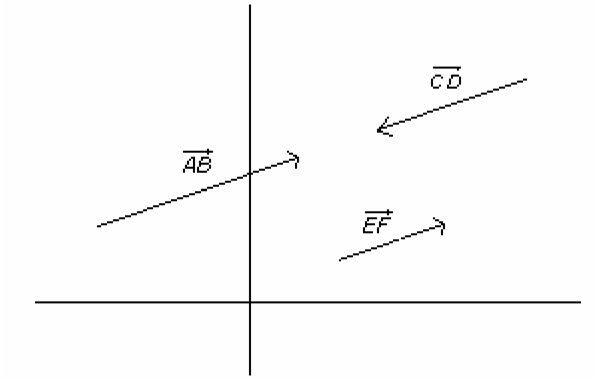
Se llaman **componentes** del vector fijo $\overrightarrow{AB}$ al par de números reales que se obtiene restando las coordenadas del extremo B menos las del origen A. Si el vector es nulo sus componentes son (0, 0).

Ejemplo 1:
Dados los puntos A = (1, 3) y B = (2, -1), las componentes del vector fijo $\overrightarrow{AB}$ son (2-1, -1-3) = (1, -4)

Dirección, sentido y módulo de un vector

- La **dirección** de un vector fijo no nulo es la de la recta que lo contiene. Así dos vectores tienen la misma dirección si están en la misma recta o en rectas paralelas.

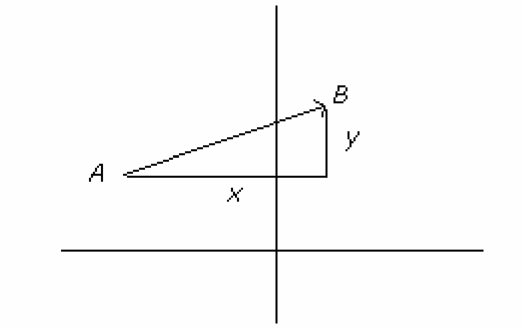
Ejemplo 2: Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ representados en la figura tienen la misma dirección



- Dos vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ con la misma dirección tienen el mismo **sentido** si:
  - Estando en distintas rectas, los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ no se cortan.
  - Estando en la misma recta, la intersección de las semirrectas determinadas por los orígenes de ambos vectores es otra semirrecta y no un segmento o el conjunto vacío.

Ejemplo 3: Considerando los vectores del ejemplo anterior, se tiene que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{EF}$ tienen el mismo sentido, pero $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen distinto sentido y $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ también.

- El **módulo** de un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es la longitud del segmento $\overline{AB}$ y se denota $|\overrightarrow{AB}|$.
  Para calcular el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$, de componentes (x, y), basta aplicar el teorema de Pitágoras obteniéndose $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$



Ejemplo 4: Dados los puntos $A=(-3, 2)$ y $B=(1, 4)$ las componentes del vector fijo $\overrightarrow{AB}$ son (1-(-3), 4-2) = (4, 2) y su módulo es $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Distancia entre dos puntos

La **distancia** entre dos puntos del plano $A = (a_1, a_2)$ y $B=(b_1, b_2)$ es el módulo del vector fijo $\overrightarrow{AB}$, es decir, $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

Ejemplo 5: Dados los puntos $A=(3, -2)$ y $B=(4, 1)$, su distancia es $d(A, B) = \sqrt{(4-3)^2+(1+2)^2} = \sqrt{10}$

VECTORES LIBRES

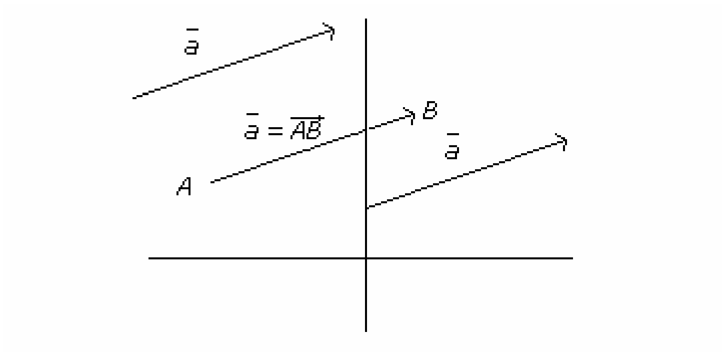
Dos vectores fijos son **equipolentes** si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

Atendiendo a sus componentes se puede comprobar que dos vectores fijos son **equipolentes** si y sólo si tienen las mismas componentes.

La relación de equipolencia proporciona una clasificación de los vectores fijos en subconjuntos disjuntos, cada uno de los cuales da lugar a un vector libre.

Así, se define **vector libre** como el conjunto formado por todos los vectores fijos equipolentes a uno dado. Se denota generalmente con una letra minúscula.

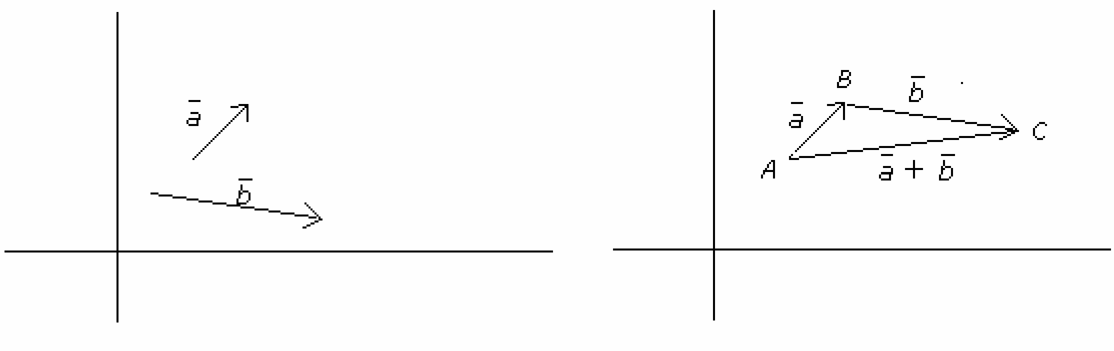
Dado un vector libre $\overline{a}$ y un punto del plano *A*, existe un único vector fijo que lo representa con origen en dicho punto. Así, para trabajar con un vector libre se puede elegir como representante el vector fijo más conveniente en cada caso.



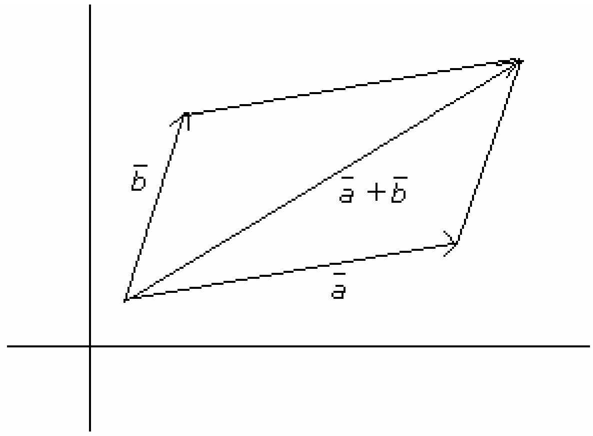
Las **componentes** de un vector libre son las de cualquier vector fijo que lo representa. Esta definición es consistente ya que todos los vectores fijos equipolentes tienen las mismas componentes.

Operaciones con vectores libres

Suma : Dados dos vectores libres $\overline{a}$ y $\overline{b}$ para calcular su suma se considera un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ representante del vector $\overline{a}$ y el vector fijo $\overrightarrow{BC}$ representante de $\overline{b}$, cuyo origen coincide con el extremo de $\overrightarrow{AB}$, así la suma $\overline{a}+\overline{b}$ es el vector libre representado por el vector fijo $\overrightarrow{AC}$.



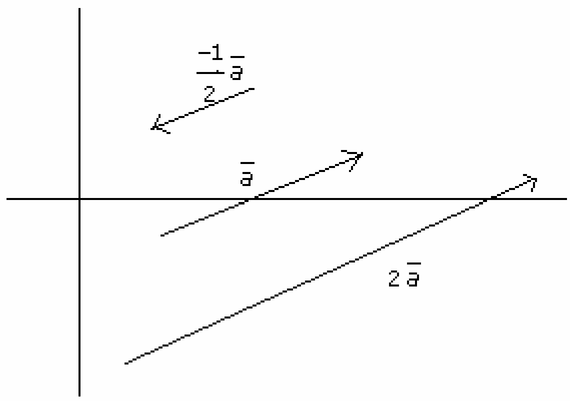
Otra forma de calcular la suma $\overline{a}+\overline{b}$ es con la llamada *Ley del paralelogramo*. Para ello se consideran representantes de los vectores libres $\overline{a}$ y $\overline{b}$ con origen en un mismo punto y se traza el paralelogramo que determinan, así $\overline{a}+\overline{b}$ es el vector libre representado por el vector fijo que tiene el origen en el origen común y el extremo en el de la diagonal del paralelogramo.



Si los vectores vienen dados por sus componentes basta sumar las componentes correspondientes para obtener las del vector suma.

Ejemplo 6: Si $\bar{a}$ = (8, 3) y $\bar{b}$ = (4, -5) entonces $\bar{a}$ + $\bar{b}$ = (8+4, 3-5) = (12, -2)

Producto por un número real : Dado un número real *t* y un vector libre $\bar{a}$, el producto $t.\bar{a}$ es el vector libre formado por los vectores fijos con la misma dirección que $\bar{a}$, el mismo sentido si *t* es positivo y sentido contrario si es negativo y módulo igual al producto del valor absoluto de *t* por el módulo de $\bar{a}$.



Si el vector viene dado por sus componentes basta multiplicar ambas por el número real, para obtener las del vector producto.

Ejemplo 7: Si t = -3 y $\bar{a}$ = (8, -2) entonces $t.\bar{a}$ = -3.(8, -2) = (-24, 6)

Es fácil deducir que dos vectores no nulos tienen la misma dirección si y sólo si uno de ellos es el producto de un número real no nulo por el otro vector, o lo que es lo mismo si las componentes son proporcionales.

Ejemplo 8:

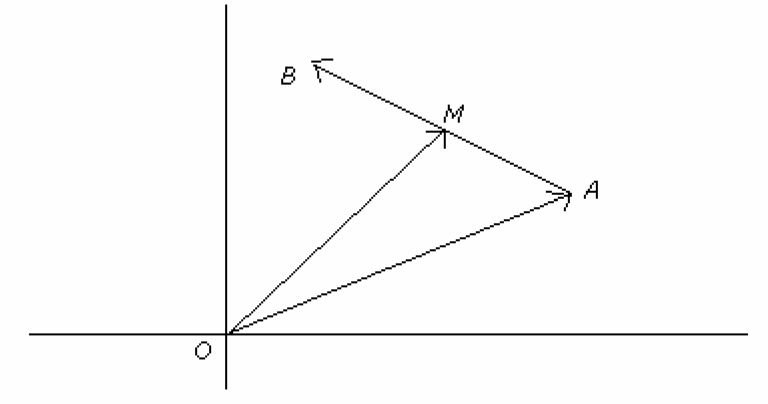
Los vectores $\bar{a}$ = (8, 12) y $\bar{b}$ = (-2, -3) tienen la misma dirección, puesto que $\bar{a} = -4\bar{b}$, o bien que $\frac{8}{-2} = \frac{12}{-3}$.

El vector $\bar{c}$ = (1, -1) tiene distinta dirección que $\bar{a}$ ya que $\frac{8}{1} \neq \frac{12}{-1}$

Punto medio de un segmento

Dados dos puntos del plano $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$ se observa que su punto medio M tiene por coordenadas las componentes del vector $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, es decir:

$$(a_1, a_2) + \frac{1}{2}(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$$



Ejemplo 9:

El punto medio del segmento $\overline{AB}$ siendo $A = (4, -2)$ y $B = (2, -3)$ es $M = \left(\frac{4+2}{2}, \frac{-2-3}{2}\right) = \left(3, \frac{-5}{2}\right)$