Solución

a) La función $f(x)$ es continua en R – {-3} y en x = -3 hay una discontinuidad no evitable ya que

$\lim_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$.

La función $f(x)$ es derivable en R – {-3, 1}, en x = -3 no es derivable ya que la función no es continua y en x = 1 tampoco es derivable puesto que $f'(1^+) = +\infty$.

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x+3)^2} & \text{si} \quad x < -3 \\ 2x+2 & \text{si} \quad -3 < x < 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

b) La función $f(x)$ es continua en R.
Es derivable en R – {0} y en x = 0 la función no es derivable ya que

$f'(0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2}$ no existe.

La derivada de f es $f'(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^2} \cos \dfrac{1}{x^2}$, que existe si $x \neq 0$.

c) La función $f(x)$ es continua en R.

Es derivable en R – $\left\{-\dfrac{7}{2}\right\}$ y en x = $-\dfrac{7}{2}$ la función no es derivable ya que presenta un punto de pico.

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x < -\dfrac{7}{2} \\ 2 & \text{si} \quad x > -\dfrac{7}{2} \end{cases}$