Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

REGLA DE L' HÔPITAL

Su aplicación permite resolver algunas indeterminaciones en el cálculo de límites de funciones derivables.

Regla de l' Hôpital

Si f y g son funciones continuas y derivables en un intervalo abierto que contiene a un punto x_o verificando:

a) $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o} g(x) = 0$

b) $g'(x) \neq 0$ en cualquier $x \neq x_o$ del intervalo

c) Existe $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces, existe $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Observaciones:

1. La regla de L'Hôpital también se puede aplicar si $x \to \pm\infty$.

2. La regla de L'Hôpital además de resolver indeterminaciones del tipo $\dfrac{0}{0}$ también se puede aplicar para resolver indeterminaciones del tipo $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

3. Si al calcular $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ nos volvemos a encontrar en las condiciones establecidas por esta regla se puede volver aplicar de nuevo, y así sucesivamente las veces que consideremos oportunas para la consecución del límite buscado.

4. Para resolver el resto de indeterminaciones no se puede aplicar directamente esta regla. En estos casos se han de transformar en una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ y después aplicar la regla de L'Hôpital.

Ejemplo 9: Utilizando la regla de L'Hôpital se pueden calcular fácilmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{\ln x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \underset{(L'Hôpital)}{=} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x - 2}{\frac{1}{x}} = \dfrac{0}{1} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{3x^2} = \left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right] \underset{(L'Hôpital)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{6x} = \left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right] \underset{(L'Hôpital)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{6} = +\infty$

NOTA: Las indeterminaciones que aparecen en el cálculo del límite se indican entre corchetes.

Ejemplo 10: Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = [0.(-\infty)] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\dfrac{-\infty}{+\infty}\right] \underset{(L'Hôpital)}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0} (-x) = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)=\left[+\infty-\infty\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-x}{x\operatorname{sen}x}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{(L'H\hat{o}pital)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\operatorname{sen}x+x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{(L'H\hat{o}pital)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}x}{\cos x+\cos x-x\operatorname{sen}x}=\frac{0}{2}=0$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\ln x}=\left[1^{-\infty}\right]=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln x\,(1+x^2-1)}=e^{[(-\infty).0]}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}}=e^{\left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]}\underset{(L'H\hat{o}pital)}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{-2}}=e^0=1$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2+2)^{\frac{1}{x}}=\left[(+\infty)^0\right]=e^{\ln\left(\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2+2)^{\frac{1}{x}}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x^2+2)^{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x}\ln(x^2+2)}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(x^2+2)}{x}}=e^{\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]}\underset{(L'H\hat{o}pital)}{=}$

$=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{2x}{x^2+2}}{1}}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x}{x^2+2}}=e^0=1$