FUNCIÓN DERIVADA. PROPIEDADES

Si una función $f(x)$ tiene derivada en todos los puntos de un conjunto $A \subseteq D$, se dice que f es derivable en A. En este caso, se puede definir una nueva función se denota por f', $\dfrac{df}{dx}$ o Df y se llama **función derivada de *f*** dada por $f': A \to \circ$ con $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Aplicando la definición de derivada se obtienen las siguientes **reglas de derivación** que indican como obtener la función derivada de las funciones elementales más utilizadas.

$f(x) = c$	$\Rightarrow$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^a$	$\Rightarrow$	$f'(x) = ax^{a-1}$
$f(x) = a^x$ con a > 0	$\Rightarrow$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = e^x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a x$ con a > 0	$\Rightarrow$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}\log_a e = \dfrac{1}{x\ln a}$
$f(x) = \ln x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$f(x) = \operatorname{arcsen} x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Propiedades

1. Si *f* y *g* son dos funciones derivables entonces *f* + *g* también lo es y $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
2. Si *f* es una función derivable y *t* un número real cualquiera entonces *t.f* también lo es y $(t.\,f)'(x) = t\, f'(x)$
3. Si *f* y *g* son dos funciones derivables, entonces, *f.g* también lo es y $(f.\,g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
4. Si *f* y *g* son dos funciones derivables con $g(x) \neq 0$ entonces $\dfrac{f}{g}$ también lo es y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

5. Si f es derivable en x y g lo es en $f(x)$ entonces $g \circ f$ es derivable en x y $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$. Esta propiedad se conoce con el nombre de *Regla de la cadena*.
6. Si f es una función inyectiva y derivable en x con $f'(x) \neq 0$ entonces la función inversa f^{-1} es derivable en $f(x)$ y $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Aplicando estas propiedades y las reglas de derivación se puede obtener fácilmente la función derivada de las funciones más habituales.

Ejemplo 6: Hallar la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + \operatorname{sen} x$, derivando cada sumando se obtiene, $f'(x) = 2x + \cos x$

b) $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x^2}$, escribiendo la función de la forma $f(x) = x^3 - x^{-2} + x^{\frac{2}{3}}$ y derivando cada sumando queda

$$f'(x) = 3x^2 - (-2)x^{-3} + \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = 3x^2 + \frac{2}{x^3} + \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = 3x^2 + \frac{2}{x^3} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

c) $f(x) = x^3 e^{2x}$, aplicando la regla de derivación del producto queda, $f'(x) = 3x^2 e^{2x} + x^3 2e^{2x} = 3x^2 e^{2x} + 2x^3 e^{2x}$.

d) $f(x) = \dfrac{x^3 - x + 1}{-x + 2}$, aplicando la regla de derivación del cociente queda

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 1)(-x + 2) - (x^3 - x + 1)(-1)}{(-x + 2)^2} = \frac{-2x^3 + 6x^2 - 1}{(-x + 2)^2}$$

e) $f(x) = \ln \dfrac{x+1}{x-1}$, aplicando la regla de la cadena queda, $f'(x) = \dfrac{1}{\frac{x+1}{x-1}} \dfrac{x - 1 - (x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{-2}{x^2 - 1}$

f) $f(x) = e^{\operatorname{sen} 3x}$, aplicando la regla de la cadena queda, $f'(x) = 3\cos 3x\ e^{\operatorname{sen} 3x}$

Ejemplo 7: Hallar la función derivada de $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Para cualquier valor de $x < 2$, aplicando la reglas de derivación se tiene $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$.

Para cualquier valor de $x > 2$, derivando el polinomio se tiene $f'(x) = 2x$.

Para $x = 2$, veamos en primer lugar si la función es continua calculando los límites laterales

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(x^2 - 4\right) = 0 \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

como estos límites no coinciden la función no es continua en $x = 2$ y por lo tanto no es derivable en este punto.

Así, la función derivada de f es $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-2)^2} & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Una vez definida la función f' se puede plantear si esta función tiene derivada. Así para aquellos puntos en los que f' tiene derivada, se define la **función derivada segunda** de f que se denota por f'', $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ o $D^2 f$ dada por $f''(x) = (f')'(x)$.

Reiterando este proceso se pueden definir las derivadas sucesivas de *f*: función derivada tercera, cuarta, …, **función derivada *n*-ésima**, que las denotaremos por f''', $f^{(4)}$,… , $f^{(n)}$, respectivamente.

Ejemplo 8: Hallar la función derivada n-ésima de $f(x) = e^{3x}$.

Se calcula en primer lugar la función derivada obteniéndose $f'(x) = 3\ e^{3x}$.

La función derivada segunda de *f* se halla derivando la función $f'(x)$ quedando $f''(x) = 3^2\ e^{3x}$.

La función derivada tercera de *f* se halla derivando la función $f''(x)$ quedando $f'''(x) = 3^3\ e^{3x}$.

Reiterando el proceso y generalizando los resultados obtenidos se tiene que la función derivada n-ésima de *f* es $f^{(n)}(x) = 3^n\ e^{3x}$.

NOTA:

En el apartado c) antes de comenzar a derivar conviene escribir la función como sigue:

$$f(x) = \ln\frac{\sqrt{x+1}}{2-x} = \frac{1}{2}\ln(x+1) - \ln(2-x)$$