

## CONCAVIDAD, CONVEXIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Dada una función  $y = f(x)$  y un punto  $x_0 \in D$  en el que la función es derivable, se dice que  $f(x)$  es:

• **Cóncava** en  $x_0$ , si existe un entorno de  $x_0$  en el que la gráfica de  $f$  no queda por encima de la recta tangente a  $f$  en  $x_0$ , es decir, si  $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

Si para  $x \neq x_0$  la desigualdad anterior es estricta se dice que  $f$  es **estrictamente cóncava** en  $x_0$ .

• **Convexa** en  $x_0$ , si existe un entorno de  $x_0$  en el que la gráfica de  $f$  no queda por debajo de la recta tangente a  $f$  en  $x_0$ , es decir, si  $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

Si para  $x \neq x_0$  la desigualdad anterior es estricta se dice que  $f$  es **estrictamente convexa** en  $x_0$ .

La función  $f$  tiene en  $x_0 \in D$  un **punto de inflexión** si  $f$  es estrictamente cóncava a la izquierda de  $x_0$  y estrictamente convexa a su derecha o viceversa.

Si  $f$  es derivable en un punto de inflexión  $x_0$ , entonces la recta tangente a  $f$  en dicho punto atraviesa a la gráfica de  $f$  en  $(x_0, f(x_0))$ .

A continuación, se enuncian tres resultados que caracterizan la concavidad, convexidad y la existencia de puntos de inflexión para funciones derivables.

### Proposición 1 (condiciones suficientes de concavidad y convexidad)

Si  $f$  es una función con derivada segunda continua en un punto  $x_0$ , se verifica :

a)  $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$  es estrictamente convexa en  $x_0$

b)  $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$  es estrictamente cóncava en  $x_0$

### Proposición 2 (condición necesaria de punto de inflexión)

Si  $f$  es una función con derivada segunda continua en un punto  $x_0$  y  $f$  tiene en  $x_0$  un punto de inflexión, entonces  $f''(x_0) = 0$ .

### Proposición 3 (condición suficiente de punto de inflexión)

Si  $f$  es una función con derivada tercera continua en un punto  $x_0$  y  $f''(x_0) = 0$ , se verifica:

$$f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0 \text{ es un punto de inflexión de } f$$

*Nota:* Entre los candidatos a puntos de inflexión, hay que tener en cuenta no sólo aquellos puntos que anulan  $f''(x)$  sino también donde no existe.

Ejemplo 4: Estudiar la concavidad, convexidad y hallar los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

a)  $f(x) = \ln(1 + x^2)$

Su derivada segunda se ha calculado en el ejemplo 2a) y es  $f''(x) = \frac{-2x^2 + 2}{(1 + x^2)^2}$ .

Para realizar el estudio de su signo se factoriza únicamente el numerador ya que el denominador es siempre positivo quedando  $f''(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} = \frac{2(1 - x)(1 + x)}{(1 + x^2)^2}$

El signo de esta expresión depende de los signos de  $(1 - x)$  y de  $(1 + x)$  que cambia en los puntos  $x = 1$  y  $x = -1$  respectivamente, como se observa en la siguiente tabla:

Signo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$1 - x$	+	+	-
$1 + x$	-	+	+
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Luego en los intervalos  $(-\infty, -1)$  y  $(1, +\infty)$  la función es estrictamente cóncava y en  $(-1, 1)$  es estrictamente convexa. Además como  $x = 1$  y  $x = -1$  son puntos del dominio de  $f$  en los que cambia la concavidad-convexidad de la función, se tiene que son puntos de inflexión.

b)  $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$

Calculamos sus derivadas de primer y segundo orden que son  $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}$  y  $f''(x) = \frac{-4}{9\sqrt[3]{(2x-1)^5}}$ . Como

$f''(x) \neq 0$  sólo hay que considerar el punto  $x = \frac{1}{2}$  del dominio en el que la función no es derivable, y estudiar el signo de  $f''(x)$  antes y después de él.

En  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$  se cumple que  $f''(x) > 0$ , luego  $f$  es estrictamente convexa y en  $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$  se cumple que  $f''(x) < 0$ , luego  $f$  es estrictamente cóncava. Por lo tanto,  $x = \frac{1}{2}$  es un punto de inflexión de  $f$ .

Ejemplo 5: Hallar los puntos de inflexión de la función  $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12$

Se calcula la derivada de segundo orden que es  $f''(x) = 36x^2 - 60x - 24$  y los puntos donde se anula, obteniéndose

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 36x^2 - 60x - 24 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ y } x = -\frac{1}{3}$$

Para comprobar la condición suficiente de punto de inflexión se halla la derivada tercera quedando  $f'''(x) = 72x - 60$  cuyo valor en los puntos  $x = 2$  y  $x = -\frac{1}{3}$  es:  $f'''(2) = 72 \cdot 2 - 60 = 84 \neq 0$  y  $f'''(-\frac{1}{3}) = 72 \left(-\frac{1}{3}\right) - 60 = -84 \neq 0$ . Por lo tanto,  $x = 2$  y  $x = -\frac{1}{3}$  son puntos de inflexión de  $f$ .

Las tres proposiciones anteriores se pueden generalizar en el siguiente resultado:

Si  $f(x)$  es una función que tiene derivadas continuas hasta orden  $n$  en un punto  $x_0 \in D$  y  $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ,  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ , entonces:

$$\text{Si } n \text{ es par y } \begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente convexa en } x_0 \\ f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente cóncava en } x_0 \end{cases}$$

Si  $n$  es impar  $\Rightarrow x_0$  es un punto de inflexión de  $f$

Ejemplo 6: Hallar los puntos de inflexión de la función  $f(x) = -2x^5 + 7x - 1$

Se calcula la derivada de segundo orden,  $f''(x) = -40x^3$  que únicamente se anula en  $x = 0$ .

Hallando la derivada tercera queda  $f'''(x) = -120x^2$  cuyo valor en el punto  $x = 0$  es  $f'''(0) = 0$ . Al ser cero esta derivada se calculan las derivadas siguientes en  $x = 0$  hasta encontrar la primera que no se anule, obteniéndose:

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= -240x \text{ cuyo valor en } x = 0 \text{ es } f^{(4)}(0) = 0 \\ f^{(5)}(x) &= -240 \text{ cuyo valor en } x = 0 \text{ es } f^{(5)}(0) = -240 \neq 0 \end{aligned}$$

Como la primera derivada no nula en  $x = 0$  es de orden impar,  $n = 5$ , se concluye que  $x = 0$  es punto de inflexión de  $f$ .