Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

CONCEPTO Y PROPIEDADES

El concepto de integral definida aparece en el cálculo del área de un recinto plano limitado por las gráficas de ciertas funciones definidas en un intervalo cerrado y acotado.

Sean $f(x)$ una función continua en un intervalo $[a, b]$ y $F(x)$ una primitiva de $f(x)$. La **integral definida** de $f(x)$ en $[a, b]$ se calcula como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Los valores a y b se llaman **extremos de integración**.

Esta forma de calcular la integral definida se conoce con el nombre de **Regla de Barrow** y se suele escribir: $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

Ejemplos 1:

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\int_1^2 (1 - x^3)\,dx = \left. x - \frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \left(2 - \frac{16}{4}\right) - \left(1 - \frac{1}{4}\right) = -2 - \frac{3}{4} = -\frac{11}{4}$$

Propiedades:

1.- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2.- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3.- $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ con $a < c < b$

4.- $\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right] dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

5.- $\int_a^b k\, f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$, $k \in \mathbb{R}$

Las propiedades 4 y 5 hacen referencia a la linealidad de la integral definida.

Cambio de variable en la integral definida: Si se realiza un cambio de variable en una integral definida es necesario calcular los extremos de integración para la nueva variable.

Ejemplo 2: $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

Para resolver la integral se hace el cambio de variable $\sqrt{x+1} = t$, elevando al cuadrado queda $x + 1 = t^2$ y despejando x, $x = t^2 - 1$

Diferenciando la igualdad anterior se obtiene $dx = 2t\,dt$.

Los nuevos extremos de integración para esta variable se calculan sustituyendo los extremos iniciales en $t = \sqrt{x+1}$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1$$
$$x = 3 \quad \Rightarrow \quad t = 2$$

Sustituyendo el cambio en la integral inicial y resolviendo la integral obtenida queda:

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int_1^2 \frac{t^2-1}{\sqrt{t^2}} 2t\,dt = 2\int_1^2 \frac{t^2-1}{t} t dt = 2\int_1^2 (t^2-1)dt = 2\int_1^2 t^2 dt - 2\int_1^2 dt = \left[\frac{2t^3}{3} - 2t\right]_1^2 = \left(\frac{16}{3} - 4\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{8}{3}$$