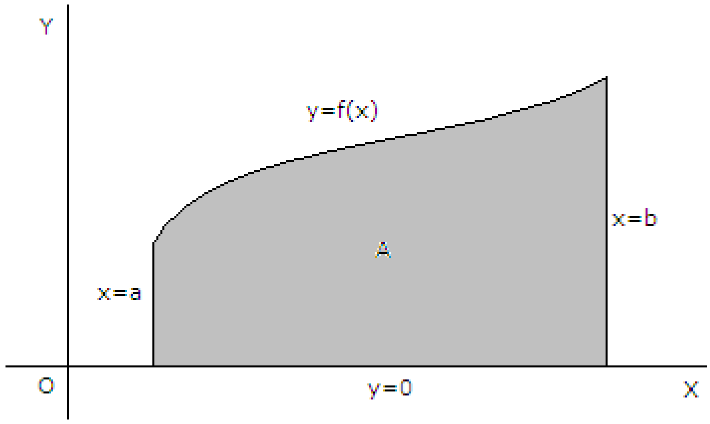
CÁLCULO DE ÁREAS EN EL PLANO

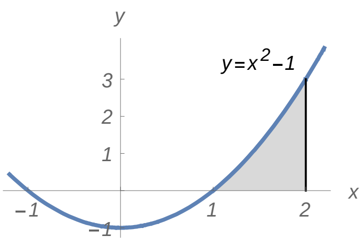
1. Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ verificando $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, es decir, la gráfica de la función está situada por encima del eje OX en dicho intervalo.

La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área de la figura plana delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas $y = 0$, y las rectas verticales $x = a,\ x = b$

$$\text{Área} = A = \int_a^b f(x)\,dx$$



Ejemplo 3: El área delimitada por la parábola $y = x^2 - 1$, el eje de abscisas $y=0$ y las rectas $x=1$, $x=2$ es

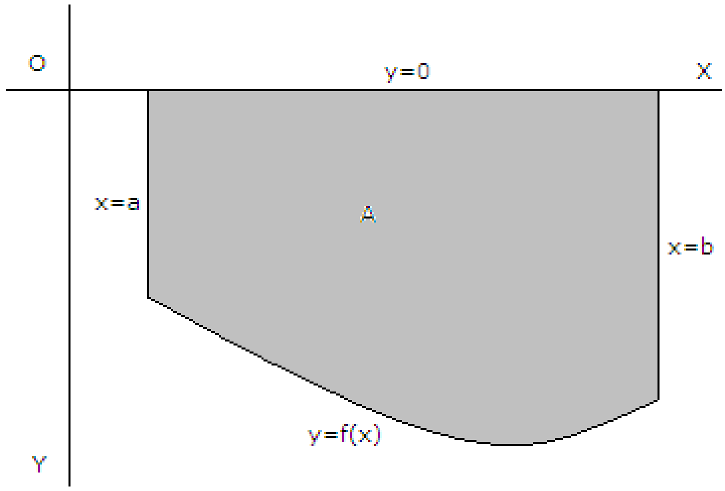


$$A = \int_1^2 (x^2 - 1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$$

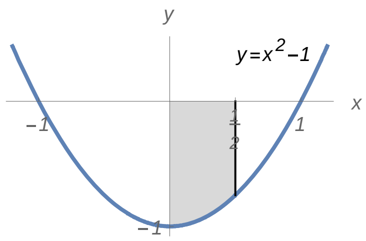
2. Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ verificando $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, es decir la gráfica de la función está situada por debajo del eje OX en dicho intervalo.

El área de la figura plana delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas $y = 0$, y las rectas verticales $x = a,\ x = b$ viene dada por:

$$\text{Área} = A = -\int_a^b f(x)\,dx$$



Ejemplo 4: El área delimitada por la parábola $y = x^2 - 1$, el eje de abscisas $y=0$ y las rectas $x=0$, $x=1/2$ es

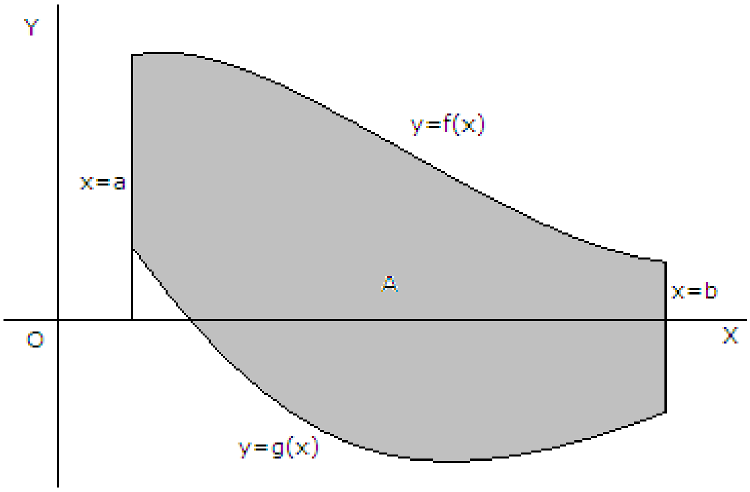


$$A = -\int_0^{1/2} (x^2 - 1)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_0^{1/2} = \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{11}{24}$$

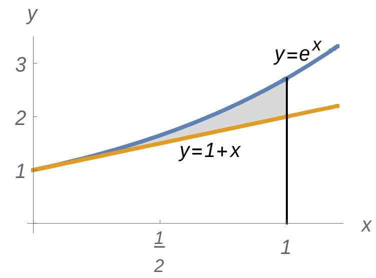
3. Sea $y = f(x), y = g(x)$ funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ verificando $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$, es decir la gráfica de la función $f(x)$ se sitúa por encima de la gráfica de $g(x)$ en dicho intervalo.

El área de la figura plana delimitada por las curvas $y = f(x), y = g(x)$ y las rectas verticales $x = a,\ x = b$ viene dada por:

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$$



Ejemplo 5: El área delimitada por la recta $y = 1+x$, la curva $y = e^x$ y las rectas $x=0$, $x=1$ es



$$A = \int_0^1 \left(e^x - (1+x)\right) dx = \left[e^x - x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(e - 1 - \frac{1}{2}\right) - 1 = e - \frac{5}{2}$$