INTEGRAL DEFINIDA

CONCEPTO Y PROPIEDADES

El concepto de integral definida aparece en el cálculo del área de un recinto plano limitado por las gráficas de ciertas funciones definidas en un intervalo cerrado y acotado.

Sean $f(x)$ una función continua en un intervalo $[a, b]$ y $F(x)$ una primitiva de $f(x)$. La **integral definida** de $f(x)$ en $[a, b]$ se calcula como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Los valores a y b se llaman **extremos de integración**.

Esta forma de calcular la integral definida se conoce con el nombre de **Regla de Barrow** y se suele escribir: $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

Ejemplos 1:

$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \left.\dfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \dfrac{1^3}{3} - \dfrac{(-1)^3}{3} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

$\int_1^2 (1 - x^3)\,dx = \left. x - \dfrac{x^4}{4}\right]_1^2 = \left(2 - \dfrac{16}{4}\right) - \left(1 - \dfrac{1}{4}\right) = -2 - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{11}{4}$

Propiedades:

1.- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2.- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3.- $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ con $a < c < b$

4.- $\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

5.- $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$, $k \in \mathbb{R}$

Las propiedades 4 y 5 hacen referencia a la linealidad de la integral definida.

Cambio de variable en la integral definida: Si se realiza un cambio de variable en una integral definida es necesario calcular los extremos de integración para la nueva variable.

Ejemplo 2: $\int_0^3 \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

Para resolver la integral se hace el cambio de variable $\sqrt{x+1} = t$, elevando al cuadrado queda $x + 1 = t^2$ y despejando x, $x = t^2 - 1$

Diferenciando la igualdad anterior se obtiene $dx = 2t\,dt$.

Los nuevos extremos de integración para esta variable se calculan sustituyendo los extremos iniciales en $t = \sqrt{x+1}$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1$$
$$x = 3 \quad \Rightarrow \quad t = 2$$

Sustituyendo el cambio en la integral inicial y resolviendo la integral obtenida queda:

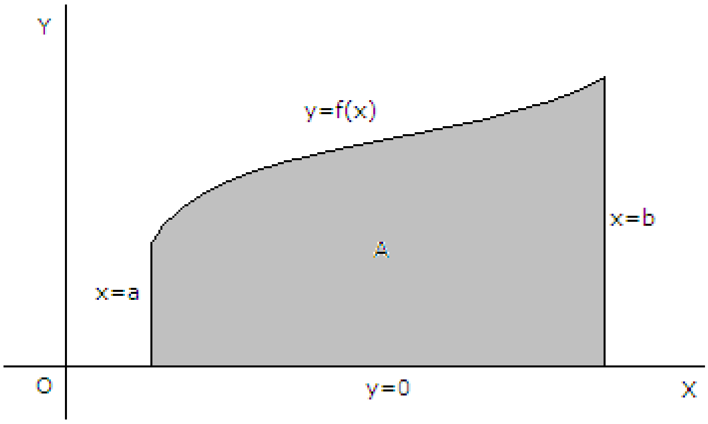
$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int_1^2 \frac{t^2-1}{\sqrt{t^2}}2t\,dt = 2\int_1^2 \frac{t^2-1}{t}t\,dt = 2\int_1^2 (t^2-1)dt = 2\int_1^2 t^2 dt - 2\int_1^2 dt = \left[\frac{2t^3}{3} - 2t\right]_1^2 = \left(\frac{16}{3} - 4\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{8}{3}$$

CÁLCULO DE ÁREAS EN EL PLANO

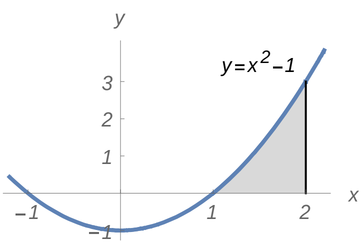
1. Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ verificando $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, es decir, la gráfica de la función está situada por encima del eje OX en dicho intervalo.

La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área de la figura plana delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas $y = 0$, y las rectas verticales $x = a,\ x = b$

$$\text{Área} = A = \int_a^b f(x)\,dx$$



Ejemplo 3: El área delimitada por la parábola $y = x^2 - 1$, el eje de abscisas $y=0$ y las rectas $x=1$, $x=2$ es

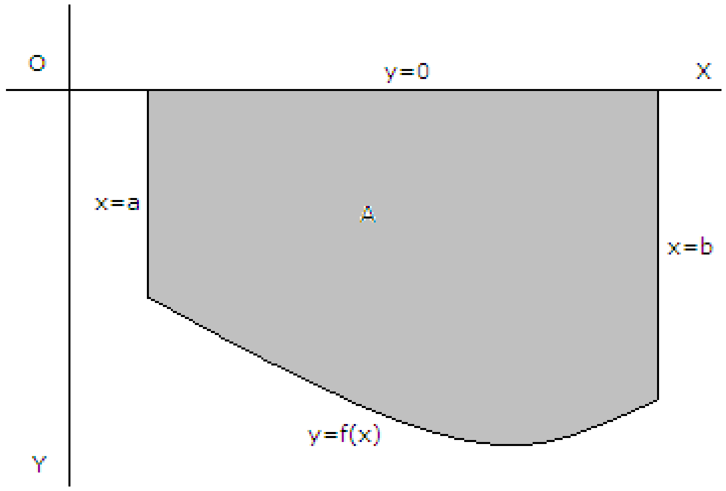


$$A = \int_1^2 (x^2 - 1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$$

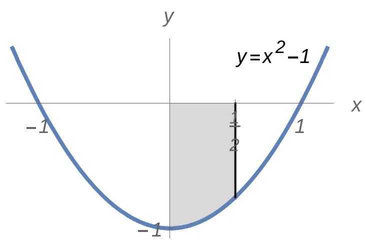
2. Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ verificando $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, es decir la gráfica de la función está situada por debajo del eje OX en dicho intervalo.

El área de la figura plana delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas $y = 0$, y las rectas verticales $x = a,\ x = b$ viene dada por:

$$\text{Área} = A = -\int_a^b f(x)\,dx$$



Ejemplo 4: El área delimitada por la parábola $y = x^2 - 1$, el eje de abscisas y=0 y las rectas x=0, x=1/2 es

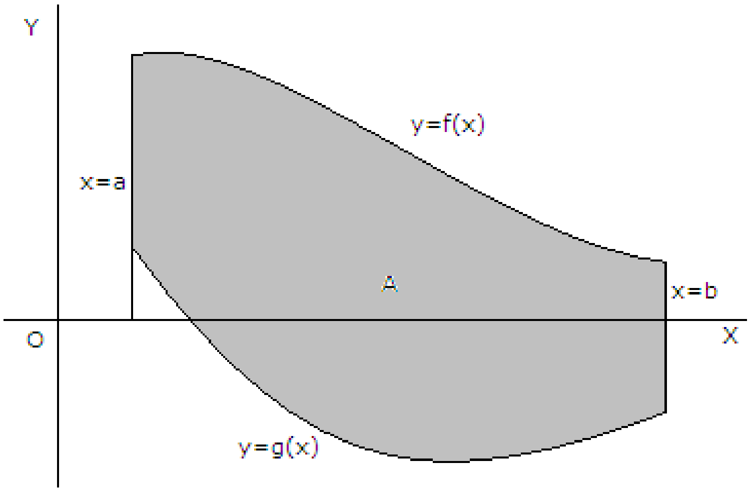


$$A = -\int_0^{1/2}(x^2-1)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^{1/2} = \left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{2}\right)-0 = \frac{11}{24}$$

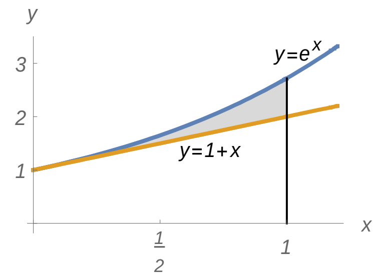
3. Sea $y = f(x), y = g(x)$ funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ verificando $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$, es decir la gráfica de la función $f(x)$ se sitúa por encima de la gráfica de $g(x)$ en dicho intervalo.

El área de la figura plana delimitada por las curvas $y = f(x), y = g(x)$ y las rectas verticales $x = a$, $x = b$ viene dada por:

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$$



Ejemplo 5: El área delimitada por la recta $y = 1+x$, la curva $y = e^x$ y las rectas $x=0$, $x=1$ es



$$A = \int_0^1 \left(e^x - (1+x)\right) dx = \left[e^x - x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(e - 1 - \frac{1}{2}\right) - 1 = e - \frac{5}{2}$$