Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

CONCEPTOS BÁSICOS: PRIMITIVA E INTEGRAL INDEFINIDA

El cálculo de integrales indefinidas de una función es un proceso inverso del cálculo de derivadas ya que se trata de encontrar una función cuya derivada coincida con una función dada.

Dada una función real de variable real $f(x)$ definida en $[a,b]$, se llama **primitiva** de $f(x)$ en $[a,b]$ a toda función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

Ejemplo 1: $F(x)=x^3$ es una primitiva de la función $f(x)=3x^2$ ya que $F'(x) = 3x^2 = f(x)$

También son primitivas de $f(x)=3x^2$ las funciones $F_1(x)=x^3+1$, $F_2(x)=x^3-5$, $F_3(x) = x^3 + \frac{2}{3}$ ya que verifican:

$$F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = 3x^2 = f(x)$$

Proposición: Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$, entonces cualquier primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$ es de la forma $F(x)+C$ con $C\in \mathbb{R}$

Ejemplo 2: Todas las primitivas de la función $f(x)=3x^2$ son de la forma $F(x)=x^3+C$ siendo $C\in \mathbb{R}$

Todas las primitivas de la función $f(x)=e^{-x}$ son de la forma $F(x)=-e^{-x}+C$ siendo $C\in \mathbb{R}$

Se llama **integral indefinida** de $f(x)$ al conjunto de todas sus primitivas y se denota como $\int f(x)\,dx$, es decir:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \text{siendo } C\in \mathbb{R} \text{ y } F(x) \text{ una primitiva de } f(x)$$

A la función $f(x)$ se le denomina **función integrando** y a la constante C, **constante de integración.**

Ejemplo 3: $\int dx = x+C$ $\qquad \int 5x^4\,dx = x^5+C$ $\qquad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ $\qquad \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C$

Observación: No toda función de una variable tiene primitivas y por tanto, integral indefinida. En este apartado sólo se consideran las funciones cuya integral indefinida se puede expresar mediante una combinación finita de funciones elementales.

Como consecuencia de la linealidad de la derivada se deducen las siguientes propiedades (**linealidad de la integral**):

1. $\int \left[f(x) + g(x)\right]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
2. $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \qquad \forall k \in \mathbb{R}$

Ejemplo 4: $\int (2x^2 - 3)\,dx = \int 2x^2\,dx + \int -3\,dx = 2\int x^2\,dx - 3\int dx = 2\frac{x^3}{3} - 3x + C$