INTEGRALES INMEDIATAS

Hay casos en los que la integral indefinida se calcula de forma inmediata, ya que la función integrando es la derivada de una función conocida. Se llaman **integrales inmediatas** a aquellas cuya expresión puede ser obtenida a partir de la tabla de derivadas de las funciones elementales. A continuación, se exponen las integrales inmediatas más utilizadas, siendo la segunda columna una generalización de la primera.

$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}+C \quad \text{si } a\neq -1$	$\int \left(f(x)\right)^a f'(x)\,dx = \frac{\left(f(x)\right)^{a+1}}{a+1}+C \quad \text{si } a\neq -1$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + C$
$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}+C$	$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\,dx = \sqrt{f(x)}+C$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+C \quad \text{si } a>0$	$\int a^{f(x)}\, f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a}+C \quad \text{si } a>0$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)}+C$
$\int \text{sen}x\,dx = -\cos x + C$	$\int \text{sen} f(x)\, f'(x)\,dx = -\cos f(x) + C$
$\int \cos x\,dx = \text{sen} x + C$	$\int \cos f(x)\, f'(x)\,dx = \text{sen}\, f(x) + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}\, x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \text{tg}\, f(x) + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg}\, x + C$	$\int \frac{f'(x)}{1+\left(f(x)\right)^2}\,dx = \text{arctg}\, f(x) + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen}\, x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-\left(f(x)\right)^2}}\,dx = \text{arcsen}\, f(x) + C$

A partir de esta tabla y utilizando las propiedades de linealidad de la integral se pueden calcular algunas integrales indefinidas.

Ejemplo 5 (relativo a integrales que se resuelven aplicando la primera columna de la tabla anterior)

a) $\int (2x^3+5x^2 - 7x+1)\,dx = 2\int x^3dx + 5\int x^2dx - 7\int xdx + \int dx = 2\frac{x^4}{4}+5\frac{x^3}{3}-7\frac{x^2}{2}+x+C = \frac{x^4}{2}+\frac{5x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+x+C$

b) $\int\left(x^4-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x}\right)dx = \int x^4\,dx - \int\frac{3}{x^3}dx + \int\frac{1}{x}dx = \int x^4\,dx - 3\int x^{-3}\,dx + \int\frac{1}{x}dx = \frac{x^5}{5}-3\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+\ln x + C = \frac{x^5}{5}+\frac{3}{2x^2}+\ln x + C$

c) $\int\left(\sqrt[5]{x^4}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=\int x^{\frac{4}{5}}\,dx-\int x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{x^{\frac{4}{5}+1}}{\frac{4}{5}+1}-\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C=\frac{5x^{\frac{9}{5}}}{9}-\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}+C=\frac{5\sqrt[5]{x^9}}{9}-\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}+C=\frac{5x\sqrt[5]{x^4}}{9}-\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}+C$

d) $\int\left(2^x+3x\right)dx=\int 2^x\,dx+3\int x dx=\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{3x^2}{2}+C$

e) $\int\left(e^x-5\operatorname{sen}x+\cos x\right)dx=\int e^x\,dx-5\int \operatorname{sen}x\,dx+\int\cos x\,dx=e^x+5\cos x+\operatorname{sen}x+C$

f) $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=2\int\frac{dx}{1+x^2}-5\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\operatorname{arctg}x-5\operatorname{arcsen}x+C$

Ejemplo 6 (relativo a integrales que se resuelven aplicando la segunda columna de la tabla anterior)

a) $\int(1-2x)^3\,dx$ **,** al ser la función integrando una potencia de base (1-2*x*)veamos si se puede aplicar la igualdad de la tabla dada por: $\int\left(f(x)\right)^a f'(x)\,dx=\frac{\left(f(x)\right)^{a+1}}{a+1}+C$ con $a=3$

Para ello se necesita tener en la función integrando la derivada de la base que en este caso es -2, por lo que se multiplica y divide por este número y aplicando la linealidad de la integral queda:

$$\int(1-2x)^3\,dx=\int\frac{-2}{-2}(1-2x)^3\,dx\,\frac{1}{-2}\int(1-2x)^3(-2)\,dx=-\frac{1}{2}\frac{(1-2x)^4}{4}+C=-\frac{(1-2x)^4}{8}+C$$

b) $\int\sqrt[3]{3x-2}\,dx=\int(3x-2)^{\frac{1}{3}}\,dx=\int\frac{3}{3}(3x-2)^{\frac{1}{3}}\,dx=\frac{1}{3}\int(3x-2)^{\frac{1}{3}}\,3\,dx=\frac{1}{3}\frac{(3x-2)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{(3x-2)^{\frac{4}{3}}}{4}+C=\frac{\sqrt[3]{(3x-2)^4}}{4}+C$

c) $\int\frac{10x-7}{5x^2-7x+1}\,dx=\ln\left(5x^2-7x+1\right)+C$

e) $\int\frac{dx}{\sqrt{3x+2}}=\int\frac{3}{3}\frac{2}{2}\frac{dx}{\sqrt{3x+2}}=\frac{2}{3}\int\frac{3dx}{2\sqrt{3x+2}}=\frac{2}{3}\sqrt{3x+2}+C$

En este caso, la función integrando se ha multiplicado y dividido por 3 para tener la derivada del radicando y se ha multiplicado y dividido por 2 para tener la derivada de la raíz.

f) $\int e^{-4x}\,dx=\int\frac{-4}{-4}e^{-4x}\,dx=\frac{1}{-4}\int e^{-4x}(-4)\,dx=-\frac{1}{4}e^{-4x}+C$

g) $\int 3^{\operatorname{sen}x}\cos x\,dx=\frac{3^{\operatorname{sen}x}}{\ln 3}+C$

h) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{5+x^2}}=\int\frac{2x\,dx}{2\sqrt{5+x^2}}=\sqrt{5+x^2}+C$

i) $\int\cos 3x\,dx=\int\frac{3}{3}\cos 3x\,dx=\frac{1}{3}\int 3\cos 3x\,dx=\frac{\operatorname{sen}3x}{3}+C$