Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Dada la integral $\int f(x)\,dx$, si consideramos x como una función de otra variable, $x = g(t)$, entonces $dx = g'(t)\,dt$, y sustituyendo en la integral inicial se obtiene $\int f(g(t))\, g'(t)\,dt$.

En el caso de que esta segunda integral sea más sencilla que la primera, se resuelve en la variable t y posteriormente se deshace el cambio de variable sustituyendo t en función de x.

En resumen, para realizar un cambio de variable en una integral se realizan los siguientes pasos:

1.- Se elige el cambio de variable que se quiere realizar indicando la expresión que relaciona la variable x inicial con la nueva variable t.

2.- Se calcula dx en función de la variable t y dt.

3.- Se sustituye en la integral la variable x y dx por las expresiones en la variable t y dt. La nueva integral obtenida solamente debe depender de t.

4.- Se resuelve esta integral, obteniendo la solución en la variable t.

5.- Se deshace el cambio de variable, dando el resultado en la variable inicial x.

Ejemplo 7:

a) $\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}\,dx$, esta integral no es inmediata ya que no se ajusta a ningún caso de la tabla. Para resolverla se hace el cambio de variable $\sqrt{x-2} = t$, elevando al cuadrado queda $x - 2 = t^2$ y despejando x, $x = t^2 + 2$

Diferenciando la igualdad anterior se obtiene $dx = 2t\,dt$.

Sustituyendo el cambio en la integral inicial y resolviendo la integral obtenida queda:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}\,dx = \int \frac{t^2+2}{\sqrt{t^2}}\,2t\,dt = 2\int \frac{t^2+2}{t}\,t\,dt = 2\int (t^2+2)\,dt = 2\int t^2 dt + 4\int dt = 2\frac{t^3}{3} + 4t + C$$

Deshaciendo el cambio resulta $\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}\,dx = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-2}\right)^3 + 4\sqrt{x-2} + C$

b) $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$, para resolver esta integral se hace el cambio de variable $e^x = t$

Diferenciando la igualdad anterior queda $e^x\,dx = dt$, es decir, $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$

Sustituyendo en la integral inicial y resolviendo se obtiene:

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^x+1} = \int \frac{t^2}{(t+1)}\frac{dt}{t} = \int \frac{t}{t+1}\,dt = \int \frac{t+1-1}{t+1}\,dt = \int\left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = \int dt - \int \frac{1}{t+1}\,dt = t - \ln(t+1) + C$$

Deshaciendo el cambio de variable resulta: $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^x+1} = e^x - \ln(e^x+1) + C$

Observación: Las integrales inmediatas generalizadas (segunda columna) también se pueden calcular mediante cambio de variable.

Ejemplo 8:

a) $\int (1-2x)^3\,dx$, esta integral es inmediata como se ha comprobado en el ejemplo 6, pero también se puede resolver realizando el cambio de variable $\begin{cases} t = 1-2x \\ dt = -2dx \end{cases}$

Sustituyendo en la integral inicial y resolviendo se obtiene:

$$\int (1-2x)^3\,dx = \int t^3\frac{dt}{-2} = -\frac{1}{2}\int t^3 dt = -\frac{1}{2}\frac{t^4}{4} + C = -\frac{1}{8}(1-2x)^4 + C$$

b) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{3sen\,x - 1}}$, esta integral es inmediata y se puede resolver aplicando la tabla, ya que es fácil obtener en el numerador la derivada del radicando.

También se puede resolver mediante el cambio de variable $\begin{cases} t = 3\text{sen}\,x - 1 \\ dt = 3\cos x\,dx \quad \Rightarrow \quad \cos x\,dx = \dfrac{dt}{3} \end{cases}$

Sustituyendo en la integral inicial y resolviendo se obtiene:

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{3sen\,x-1}} = \int \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int t^{-1/3}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{2/3}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{2}\sqrt[3]{t^2} + C = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(3sen\,x-1\right)^2} + C$$