*Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal*

## INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Se denomina **función racional** a cualquier función de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n} \quad \text{siendo} \quad a_i\,, b_j \in \mathbb{R}$$

En este apartado únicamente consideraremos funciones racionales en las que las raíces de $Q(x)$ sean reales.

Algunas funciones racionales se integran de forma inmediata; entre otras las **fracciones simples** de la forma $\dfrac{A}{(ax+b)^n}$ con $n \in \mathbb{R}$

Ejemplo 10:

a) $\int \frac{dx}{x-5} = \ln(x-5) + C$

b) $\int \frac{dx}{(x+1)^4} = \int (x+1)^{-4}\,dx = \frac{(x+1)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3(x+1)^3} + C$

c) $\int \frac{2x-5}{x^2-5x-2}\,dx = \ln(x^2-5x-2) + C$

d) $\int \frac{dx}{4x+1} = \int \frac{1}{4}\frac{4dx}{4x+1} = \frac{1}{4}\int \frac{4dx}{4x+1} = \frac{1}{4}\ln(4x+1) + C$

e) $\int \frac{7dx}{(3x+1)^2} = 7\int \frac{3}{3}(3x+1)^{-2}\,dx = \frac{7}{3}\int (3x+1)^{-2}\,3dx = \frac{7}{3}\frac{(3x+1)^{-1}}{-1} + C = -\frac{7}{3(x+1)} + C$

Si la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ no es inmediata, se procede de la siguiente forma:

**Caso I:** Si $grado\,P(x) \geq grado\ Q(x)$ se realiza la división de los polinomios

Sea $C(x)$ el cociente de la división y $R(x)$ el resto, se cumple que: $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ con $grado\,R(x) < grado\ Q(x)$

Por tanto, $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$

La integral $\int C(x)\,dx$ es inmediata y la integral $\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$ en caso de que no sea inmediata, se puede resolver como se indica en el caso II.

Ejemplo 11:

a) $\int \frac{x+1}{x-1}\,dx$ , como el grado del polinomio del numerador no es menor que el del denominador, se realiza la división:

$$\begin{array}{r|l} x+1 & x-1 \\ \hline \underline{-x+1} & 1 \\ /\quad 2 & \end{array}$$

Por tanto, $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

Integrando se obtiene $\int \frac{x+1}{x-1}\,dx = \int 1\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx = x + 2\ln(x-1) + C$

b) $\int \frac{x^2+1}{x-2}\,dx$ , como el grado del polinomio del numerador es mayor que el del denominador, se realiza la división:

$$\begin{array}{rr|l} x^2 + & 1 & x-2 \\ \hline \underline{-x^2+2x} & & x+2 \\ / & 2x+1 & \\ & \underline{-2x+4} & \\ & 5 & \end{array}$$

Por tanto, $\dfrac{x^2+1}{x-2} = x+2+\dfrac{5}{x-2}$

Integrando se obtiene $\int \dfrac{x^2+1}{x-2}\,dx = \int\left(x+2+\dfrac{5}{x-2}\right)dx = \dfrac{x^2}{2}+2x+5\ln(x-2)+C$

**Caso II:** Si $grado\,P(x) < grado\;Q(x)$ se factoriza $Q(x)$ (Ver Unidad didáctica 2) para descomponer $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en suma de fracciones simples de la siguiente forma:

- Por cada raíz real simple $a$, se considera una fracción del tipo $\dfrac{A}{x-a}$ donde $A$ es una constante real a determinar.
- Por cada raíz real múltiple $a$ de multiplicidad $r$, se cosideran las $r$ fracciones siguientes $\dfrac{A_1}{x-a}$, $\dfrac{A_2}{(x-a)^2}$ ..., $\dfrac{A_r}{(x-a)^r}$ donde $A_1$, $A_2$,..., $A_r$ son constantes reales a determinar.

Para determinar las constantes anteriores, se iguala el cociente $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ a la suma de las fracciones simples consideradas. Una vez determinadas, la resolución de la integral $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se reduce al cálculo de las integrales de las fracciones simples, aplicando la propiedad de linealidad.

Ejemplo 12:

a) $\int \dfrac{x+1}{x^2-5x+6}dx$ , como el grado del polinomio del denominador es mayor que el del numerador, en este caso no hay que realizar la división. Se calculan las raíces del denominador para factorizarlo:

$$x^2-5x+6=0\ ,\qquad x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases}2\\3\end{cases}\text{, por tanto, }\; x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

Se descompone $\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$ como suma de fracciones simples $\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}=\dfrac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$

Para determinar las constantes $A$ y $B$, al ser iguales los denominadores se igualan los numeradores:

$$x+1=A(x-3)+B(x-2)$$

y en esta igualdad se dan dos valores a la variable $x$ (preferentemente los valores de las raíces de $Q(x)$ por simplicidad en los cálculos): $\begin{cases}x=2 \;\Rightarrow\; 3=-A \Rightarrow\; A=-3\\ x=3\;\Rightarrow\; 4=B\end{cases}$

Por tanto, la integral inicial queda: $\int\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}dx=\int\dfrac{-3}{x-2}dx+\int\dfrac{4}{x-3}dx=-3\ln(x-2)+4\ln(x-3)+C$

b) $\int\dfrac{x}{x^2-2x+1}=\int\dfrac{x}{(x-1)^2}dx$

Se descompone el cociente de polinomios como suma de fracciones simples teniendo en cuenta que 1 es raíz doble del polinomio del denominador:

$$\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}\quad\Rightarrow\quad x=A(x-1)+B\ \ ;\ \ \begin{cases}x=1\Rightarrow 1=B\\ x=0\Rightarrow 0=-A+B\Rightarrow\; A=B=1\end{cases}$$

Por tanto, la integral inicial queda:

$$\int \frac{x}{x^2-2x+1} = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx = \ln(x-1) + \int (x-1)^{-2}dx = \ln(x-1) + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C = \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + C$$

c) $\int \frac{2}{x^3+4x^2}dx$ , factorizando el polinomio del denominador queda $x^3+4x^2 = x^2(x+4)$

Teniendo en cuenta que $x=0$ es una raíz doble y $x=-4$ es simple, la descomposición en fracciones simples de $\frac{2}{x^3+4x^2}$ es

$$\frac{2}{x^3+4x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+4} = \frac{Ax(x+4)+B(x+4)+Cx^2}{x^2(x+4)} \quad \Rightarrow \quad 2 = Ax(x+4)+B(x+4)+Cx^2$$

Dando 3 valores a la variable $x$ obtenemos un sistema de ecuaciones cuyas soluciones son las constantes a determinar:

$$\begin{cases} x=0 \ \Rightarrow 2=4B \Rightarrow \ B=\frac{1}{2} \\ x=-4 \Rightarrow 2=C(-4)^2 \Rightarrow \ C=\frac{1}{8} \\ x=-1 \Rightarrow 2=-3A+3B+C \ \Rightarrow 3A=3B+C-2=\frac{3}{2}+\frac{1}{8}-2=\frac{-3}{8} \ \Rightarrow \ A=-\frac{1}{8} \end{cases}$$

Por tanto, la integral inicial queda:

$$\int \frac{2}{x^3+4x^2}dx = \frac{-1}{8}\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{B}{x^2}dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{x+4}dx = -\frac{1}{8}\ln x + \frac{1}{2}\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{1}{8}\ln(x+4) + C = \frac{1}{8}\ln x - \frac{1}{2x} + \frac{1}{8}\ln(x+4) + C$$

d) $\int \frac{dx}{5x^2-11x-12}$

Se calculan las raíces del denominador para factorizarlo:

$$5x^2-11x-12=0 , \quad x = \frac{11 \pm \sqrt{121+240}}{10} = \frac{11 \pm 19}{10} = \begin{cases} 3 \\ -\frac{4}{5} \end{cases} \text{, por tanto, } 5x^2-11x-12 = 5(x-3)\left(x+\frac{4}{5}\right) = (x-3)(5x+4)$$

Se descompone $\frac{1}{5x^2-11x-12}$ como suma de fracciones simples $\frac{1}{5x^2-11x-12} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{5x+4} = \frac{A(5x+4)+B(x-3)}{(x-3)(5x+4)}$

Para determinar las constantes *A* y *B,* al ser iguales los denominadores se igualan los numeradores:

$$1 = A(5x+4)+B(x-3)$$

Dando dos valores a la variable $x$: $\begin{cases} x=3 \ \Rightarrow \ 1=19A \ \Rightarrow \ A=\frac{1}{19} \\ x=-\frac{4}{5} \ \Rightarrow \ 1=-\frac{19}{5}B \ \Rightarrow \ B=\frac{-5}{19} \end{cases}$

Por tanto, la integral inicial queda:

$$\int \frac{dx}{5x^2-11x-12} = \int \frac{dx}{(x-3)(5x+4)} = \int \frac{1}{19}\frac{dx}{x-3} + \int \left(-\frac{5}{19}\right)\frac{dx}{5x+4} = \frac{1}{19}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{19}\int \frac{5\,dx}{5x+4} = \frac{1}{19}\ln(x-3) - \frac{1}{19}\ln(5x+4) + C$$

**Observación:** En este ejercicio se ha considerado la descomposición en fracciones simples $\frac{1}{5x^2-11x-12} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{5x+4}$ en lugar de $\frac{1}{5x^2-11x-12} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+\frac{4}{5}}$ para que sea más sencillo el cálculo de las constantes.