Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

INTEGRAL INDEFINIDA

CONCEPTOS BÁSICOS: PRIMITIVA E INTEGRAL INDEFINIDA

El cálculo de integrales indefinidas de una función es un proceso inverso del cálculo de derivadas ya que se trata de encontrar una función cuya derivada coincida con una función dada.

Dada una función real de variable real $f(x)$ definida en $[a,b]$, se llama **primitiva** de $f(x)$ en $[a,b]$ a toda función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

Ejemplo 1: $F(x)=x^3$ es una primitiva de la función $f(x)=3x^2$ ya que $F'(x) = 3x^2 = f(x)$

También son primitivas de $f(x)=3x^2$ las funciones $F_1(x)=x^3+1$, $F_2(x)=x^3-5$, $F_3(x) = x^3 + \frac{2}{3}$ ya que verifican:

$$F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = 3x^2 = f(x)$$

Proposición: Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$, entonces cualquier primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$ es de la forma $F(x)+C$ con $C\in \mathbb{R}$

Ejemplo 2: Todas las primitivas de la función $f(x)=3x^2$ son de la forma $F(x)=x^3+C$ siendo $C\in \mathbb{R}$

Todas las primitivas de la función $f(x)=e^{-x}$ son de la forma $F(x)=-e^{-x}+C$ siendo $C\in \mathbb{R}$

Se llama **integral indefinida** de $f(x)$ al conjunto de todas sus primitivas y se denota como $\int f(x)\,dx$, es decir:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \text{siendo } C\in \mathbb{R} \text{ y } F(x) \text{ una primitiva de } f(x)$$

A la función $f(x)$ se le denomina **función integrando** y a la constante C, **constante de integración.**

Ejemplo 3: $\int dx = x+C$ $\qquad \int 5x^4\,dx = x^5+C$ $\qquad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ $\qquad \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C$

Observación: No toda función de una variable tiene primitivas y por tanto, integral indefinida. En este apartado sólo se consideran las funciones cuya integral indefinida se puede expresar mediante una combinación finita de funciones elementales.

Como consecuencia de la linealidad de la derivada se deducen las siguientes propiedades (**linealidad de la integral**):

1. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
2. $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \qquad \forall k \in \mathbb{R}$

Ejemplo 4: $\int (2x^2 - 3)\,dx = \int 2x^2\,dx + \int -3\,dx = 2\int x^2\,dx - 3\int dx = 2\frac{x^3}{3} - 3x + C$

INTEGRALES INMEDIATAS

Hay casos en los que la integral indefinida se calcula de forma inmediata, ya que la función integrando es la derivada de una función conocida. Se llaman **integrales inmediatas** a aquellas cuya expresión puede ser obtenida a partir de la tabla de derivadas de las funciones elementales. A continuación, se exponen las integrales inmediatas más utilizadas, siendo la segunda columna una generalización de la primera.

$\int x^a \, dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad \text{si } a \neq -1$	$\int \left(f(x)\right)^a f'(x) \, dx = \dfrac{\left(f(x)\right)^{a+1}}{a+1} + C \quad \text{si } a \neq -1$
$\int \dfrac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln f(x) + C$
$\int \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C$	$\int \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \, dx = \sqrt{f(x)} + C$
$\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad \text{si } a > 0$	$\int a^{f(x)} \, f'(x) \, dx = \dfrac{a^{f(x)}}{\ln a} + C \quad \text{si } a > 0$
$\int e^x \, dx = e^x + C$	$\int e^{f(x)} f'(x) \, dx = e^{f(x)} + C$
$\int \text{sen} x \, dx = -\cos x + \text{C}$	$\int \text{sen} f(x) \, f'(x) \, dx = -\cos f(x) + \text{C}$
$\int \cos x \, dx = \text{sen} x + \text{C}$	$\int \cos f(x) \, f'(x) \, dx = \text{sen } f(x) + \text{C}$
$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg } x + C$	$\int \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} \, dx = \text{tg } f(x) + C$
$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } x + C$	$\int \dfrac{f'(x)}{1+\left(f(x)\right)^2} \, dx = \text{arctg } f(x) + C$
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen } x + C$	$\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-\left(f(x)\right)^2}} \, dx = \text{arcsen } f(x) + C$

A partir de esta tabla y utilizando las propiedades de linealidad de la integral se pueden calcular algunas integrales indefinidas.

Ejemplo 5 (relativo a integrales que se resuelven aplicando la primera columna de la tabla anterior)

a) $\int (2x^3 + 5x^2 - 7x + 1) \, dx = 2\int x^3 dx + 5\int x^2 dx - 7\int x dx + \int dx = 2\dfrac{x^4}{4} + 5\dfrac{x^3}{3} - 7\dfrac{x^2}{2} + x + C = \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{5x^3}{3} - \dfrac{7x^2}{2} + x + C$

b) $\int \left(x^4 - \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{1}{x} \right) dx = \int x^4 \, dx - \int \dfrac{3}{x^3} dx + \int \dfrac{1}{x} dx = \int x^4 \, dx - 3\int x^{-3} \, dx + \int \dfrac{1}{x} dx = \dfrac{x^5}{5} - 3\dfrac{x^{-3+1}}{-3+1} + \ln x + C = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{3}{2x^2} + \ln x + C$

c) $\int \left(\sqrt[5]{x^4} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \int x^{\frac{4}{5}} \, dx - \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \dfrac{x^{\frac{4}{5}+1}}{\frac{4}{5}+1} - \dfrac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \dfrac{5x^{\frac{9}{5}}}{9} - \dfrac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} + C = \dfrac{5\sqrt[5]{x^9}}{9} - \dfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + C = \dfrac{5x\sqrt[5]{x^4}}{9} - \dfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + C$

d) $\int \left(2^x + 3x \right) dx = \int 2^x \, dx + 3\int x dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} + \dfrac{3x^2}{2} + C$

e) $\int \left(e^x - 5\text{sen} x + \cos x \right) dx = \int e^x \, dx - 5\int \text{sen} x \, dx + \int \cos x \, dx = e^x + 5\cos x + \text{sen} x + C$

f) $\int \left(\dfrac{2}{1+x^2} - \dfrac{5}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = 2\int \dfrac{dx}{1+x^2} - 5\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \text{ arctg } x - 5 \text{ arcsen } x + C$

Ejemplo 6 (relativo a integrales que se resuelven aplicando la segunda columna de la tabla anterior)

a) $\int (1-2x)^3\, dx$ **,** al ser la función integrando una potencia de base (1-2x)veamos si se puede aplicar la igualdad de la tabla dada por: $\int (f(x))^a f'(x)\, dx = \dfrac{(f(x))^{a+1}}{a+1} + C$ con $a = 3$

Para ello se necesita tener en la función integrando la derivada de la base que en este caso es -2, por lo que se multiplica y divide por este número y aplicando la linealidad de la integral queda:

$$\int (1-2x)^3\, dx = \int \frac{-2}{-2}(1-2x)^3\, dx\, \frac{1}{-2}\int (1-2x)^3(-2)\, dx = -\frac{1}{2}\frac{(1-2x)^4}{4} + C = -\frac{(1-2x)^4}{8} + C$$

b) $\int \sqrt[3]{3x-2}\, dx = \int (3x-2)^{\frac{1}{3}}\, dx = \int \frac{3}{3}(3x-2)^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{1}{3}\int (3x-2)^{\frac{1}{3}}\, 3\, dx = \frac{1}{3}\frac{(3x-2)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{(3x-2)^{\frac{4}{3}}}{4} + C = \frac{\sqrt[3]{(3x-2)^4}}{4} + C$

c) $\int \frac{10x-7}{5x^2-7x+1}\, dx = \ln\left(5x^2-7x+1\right) + C$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2}} = \int \frac{3}{3}\frac{2}{2}\frac{dx}{\sqrt{3x+2}} = \frac{2}{3}\int \frac{3dx}{2\sqrt{3x+2}} = \frac{2}{3}\sqrt{3x+2} + C$

En este caso, la función integrando se ha multiplicado y dividido por 3 para tener la derivada del radicando y se ha multiplicado y dividido por 2 para tener la derivada de la raíz.

f) $\int e^{-4x}\, dx = \int \frac{-4}{-4}e^{-4x}\, dx = \frac{1}{-4}\int e^{-4x}(-4)\, dx = -\frac{1}{4}e^{-4x} + C$

g) $\int 3^{sen\, x}\cos x\, dx = \frac{3^{sen\, x}}{\ln 3} + C$

h) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{5+x^2}} = \int \frac{2x\, dx}{2\sqrt{5+x^2}} = \sqrt{5+x^2} + C$

i) $\int \cos 3x\, dx = \int \frac{3}{3}\cos 3x\, dx = \frac{1}{3}\int 3\cos 3x\, dx = \frac{\text{sen} 3x}{3} + C$

INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Dada la integral $\int f(x)\, dx$, si consideramos x como una función de otra variable, $x = g(t)$, entonces $dx = g'(t)\, dt$, y sustituyendo en la integral inicial se obtiene $\int f(g(t))\, g'(t)\, dt$.

En el caso de que esta segunda integral sea más sencilla que la primera, se resuelve en la variable t y posteriormente se deshace el cambio de variable sustituyendo t en función de x.

En resumen, para realizar un cambio de variable en una integral se realizan los siguientes pasos:

1.- Se elige el cambio de variable que se quiere realizar indicando la expresión que relaciona la variable x inicial con la nueva variable t.

2.- Se calcula dx en función de la variable t y dt.

3.- Se sustituye en la integral la variable x y dx por las expresiones en la variable t y dt. La nueva integral obtenida solamente debe depender de t.

4.- Se resuelve esta integral, obteniendo la solución en la variable t.

5.- Se deshace el cambio de variable, dando el resultado en la variable inicial x.

Ejemplo 7:

a) $\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}\, dx$, esta integral no es inmediata ya que no se ajusta a ningún caso de la tabla. Para resolverla se hace el cambio de variable $\sqrt{x-2} = t$, elevando al cuadrado queda $x-2 = t^2$ y despejando x, $x = t^2 + 2$

Diferenciando la igualdad anterior se obtiene $dx = 2t\, dt$.

Sustituyendo el cambio en la integral inicial y resolviendo la integral obtenida queda:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}dx = \int \frac{t^2+2}{\sqrt{t^2}}2t\,dt = 2\int \frac{t^2+2}{t}tdt = 2\int (t^2+2)dt = 2\int t^2dt + 4\int dt = 2\frac{t^3}{3} + 4t + C$$

Deshaciendo el cambio resulta $\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}dx = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-2}\right)^3 + 4\sqrt{x-2} + C$

b) $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$, para resolver esta integral se hace el cambio de variable $e^x = t$

Diferenciando la igualdad anterior queda $e^x\,dx = dt$, es decir, $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$

Sustituyendo en la integral inicial y resolviendo se obtiene:

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^x+1} = \int \frac{t^2}{(t+1)}\frac{dt}{t} = \int \frac{t}{t+1}dt = \int \frac{t+1-1}{t+1}dt = \int \left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt = \int dt - \int \frac{1}{t+1}dt = t - \ln(t+1) + C$$

Deshaciendo el cambio de variable resulta: $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^x+1} = e^x - \ln(e^x+1) + C$

Observación: Las integrales inmediatas generalizadas (segunda columna) también se pueden calcular mediante cambio de variable.

Ejemplo 8:

a) $\int (1-2x)^3\,dx$, esta integral es inmediata como se ha comprobado en el ejemplo 6, pero también se puede resolver realizando el cambio de variable $\begin{cases} t = 1-2x \\ dt = -2dx \end{cases}$

Sustituyendo en la integral inicial y resolviendo se obtiene:

$$\int (1-2x)^3\,dx = \int t^3\frac{dt}{-2} = -\frac{1}{2}\int t^3dt = -\frac{1}{2}\frac{t^4}{4} + C = -\frac{1}{8}(1-2x)^4 + C$$

b) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{3sen\,x-1}}$, esta integral es inmediata y se puede resolver aplicando la tabla, ya que es fácil obtener en el numerador la derivada del radicando.

También se puede resolver mediante el cambio de variable $\begin{cases} t = 3\operatorname{sen} x - 1 \\ dt = 3\cos x\,dx \quad \Rightarrow \quad \cos x\,dx = \frac{dt}{3} \end{cases}$

Sustituyendo en la integral inicial y resolviendo se obtiene:

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{3sen\,x-1}} = \int \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int t^{-1/3}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{2/3}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{2}\sqrt[3]{t^2} + C = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(3sen\,x-1)^2} + C$$

INTEGRACIÓN POR PARTES

Sean $u(x)$, $v(x)$ funciones derivables, teniendo en cuenta que la derivada del producto es:

$$\left(u(x)\,v(x)\right)' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$

integrando queda:

$\int (u(x)\,v(x))'\,dx = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx$, es decir,

$u(x)\,v(x) = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx$

Despejando el último sumando se obtiene: $\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$

Teniendo en cuenta que $du = u'(x)\,dx$ y $dv = v'(x)\,dx$, en la práctica la fórmula de integración por partes se escribe: $\int \boldsymbol{u\,dv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{v\,du}$

La expresión de integración por partes permite escribir una integral en función de otra, y será útil si ésta última es más sencilla que la inicial. Algunas veces es necesario emplear el método varias veces o bien combinarlo con otros métodos.

Ejemplo 9:

a) $\int (2x+1)e^x dx$

Para resolver la integral, se consideran las siguientes partes: $\begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases}$ de donde se obtiene $\begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}$

Aplicando la fórmula de integración por partes queda:

$\int (2x+1)e^x dx = (2x+1)e^x - \int 2e^x dx = (2x+1)e^x - 2e^x + C$

b) $\int (x^2-5)\cos x\, dx$

Se consideran las siguientes partes: $\begin{cases} u = x^2-5 \\ dv = \cos x\, dx \end{cases}$ de donde se obtiene $\begin{cases} du = 2x dx \\ v = \operatorname{sen} x \end{cases}$

Aplicando la fórmula de integración por partes queda:
$\int (x^2-5)\cos x\, dx = (x^2-5)\operatorname{sen} x - \int 2x \operatorname{sen} x\, dx = (x^2-5)\operatorname{sen} x - 2\int x \operatorname{sen} x\, dx$

Para resolver la integral $\int x \operatorname{sen} x\, dx$, se aplica de nuevo el método de integración por partes:

$\begin{cases} u = x \\ dv = \operatorname{sen} x\, dx \end{cases}$ de donde se obtiene $\begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

Por tanto, $\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x\cos x - \int -\cos x dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$

Sustituyendo en la integral inicial se obtiene: $\int (x^2-5)\cos x\, dx = (x^2-5)\operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + C$

c) $\int x^3 \ln x\, dx$

Para resolver la integral, se consideran las siguientes partes: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^3\, dx \end{cases}$ de donde se obtiene $\begin{cases} du = \dfrac{1}{x} dx \\ v = \dfrac{x^4}{4} \end{cases}$

Aplicando la fórmula de integración por partes queda:

$\int x^3 \ln x\, dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}\, dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3\, dx + C = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C$

Observación:
En general, las integrales del tipo $\int P_n(x)e^{ax}\ dx$, $\int P_n(x)\operatorname{sen} ax\ dx$, $\int P_n(x)\cos ax\ dx$ siendo $P_n(x)$ un polinomio de grado n, se resuelven utilizando el método de integración por partes tomando $u = P_n(x)$. Sin embargo, en las integrales del tipo $\int P_n(x)\ln x\, dx$, se toma $u = \ln x$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Se denomina **función racional** a cualquier función de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n} \quad \text{siendo } a_i, b_j \in \mathbb{R}$$

En este apartado únicamente consideraremos funciones racionales en las que las raíces de $Q(x)$ sean reales.

Algunas funciones racionales se integran de forma inmediata; entre otras las **fracciones simples** de la forma $\dfrac{A}{(ax+b)^n}$ con $n \in \mathbb{R}$

Ejemplo 10:

a) $\int \frac{dx}{x-5} = \ln(x-5) + C$

b) $\int \frac{dx}{(x+1)^4} = \int (x+1)^{-4}\, dx = \frac{(x+1)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3(x+1)^3} + C$

c) $\int \frac{2x-5}{x^2-5x-2} dx = \ln(x^2-5x-2) + C$

d) $\int \frac{dx}{4x+1} = \int \frac{1}{4}\frac{4dx}{4x+1} = \frac{1}{4}\int \frac{4dx}{4x+1} = \frac{1}{4}\ln(4x+1) + C$

e) $\int \frac{7dx}{(3x+1)^2} = 7\int \frac{3}{3}(3x+1)^{-2}\, dx = \frac{7}{3}\int (3x+1)^{-2}\, 3\,dx = \frac{7}{3}\frac{(3x+1)^{-1}}{-1} + C = -\frac{7}{3(x+1)} + C$

Si la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$ no es inmediata, se procede de la siguiente forma:

Caso I: Si $grado\, P(x) \geq grado\ Q(x)$ se realiza la división de los polinomios

Sea $C(x)$ el cociente de la división y $R(x)$ el resto, se cumple que: $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ con $grado\, R(x) < grado\ Q(x)$

Por tanto, $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$

La integral $\int C(x)\, dx$ es inmediata y la integral $\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$ en caso de que no sea inmediata, se puede resolver como se indica en el caso II.

Ejemplo 11:

a) $\int \frac{x+1}{x-1} dx$, como el grado del polinomio del numerador no es menor que el del denominador, se realiza la división:

$$\begin{array}{rl} x+1 & \lfloor x-1 \\ \underline{-x+1} & 1 \\ / \quad 2 & \end{array}$$

Por tanto, $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

Integrando se obtiene $\int \frac{x+1}{x-1} dx = \int 1\, dx + \int \frac{2}{x-1} dx = x + 2\ln(x-1) + C$

b) $\int \frac{x^2+1}{x-2} dx$, como el grado del polinomio del numerador es mayor que el del denominador, se realiza la división:

$$\begin{array}{rl} x^2 + \quad 1 & \lfloor x-2 \\ \underline{-x^2+2x} & x+2 \\ / \quad 2x+1 & \\ \underline{-2x+4} & \\ 5 & \end{array}$$

Por tanto, $\frac{x^2+1}{x-2} = x + 2 + \frac{5}{x-2}$

Integrando se obtiene $\int \frac{x^2+1}{x-2}\, dx = \int \left(x + 2 + \frac{5}{x-2}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 5\ \ln(x-2) + C$

Caso II: Si $grado\, P(x) < grado\ Q(x)$ se factoriza $Q(x)$ (Ver Unidad didáctica 2) para descomponer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en suma de fracciones simples de la siguiente forma:

- Por cada raíz real simple a, se considera una fracción del tipo $\frac{A}{x-a}$ donde A es una constante real a determinar.

- Por cada raíz real múltiple a de multiplicidad r, se cosideran las r fracciones siguientes $\frac{A_1}{x-a}$, $\frac{A_2}{(x-a)^2}$ ..., $\frac{A_r}{(x-a)^r}$ donde A_1, A_2,..., A_r son constantes reales a determinar.

Para determinar las constantes anteriores, se iguala el cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ a la suma de las fracciones simples consideradas. Una vez determinadas, la resolución de la integral $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se reduce al cálculo de las integrales de las fracciones simples, aplicando la propiedad de linealidad.

Ejemplo 12:

a) $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}dx$, como el grado del polinomio del denominador es mayor que el del numerador, en este caso no hay que realizar la división. Se calculan las raíces del denominador para factorizarlo:

$$x^2-5x+6=0\ ,\quad x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases}2\\3\end{cases}\text{, por tanto, } x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

Se descompone $\frac{x+1}{x^2-5x+6}$ como suma de fracciones simples $\frac{x+1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$

Para determinar las constantes *A* y *B,* al ser iguales los denominadores se igualan los numeradores:

$$x+1=A(x-3)+B(x-2)$$

y en esta igualdad se dan dos valores a la variable x (preferentemente los valores de las raíces de $Q(x)$ por simplicidad en los cálculos): $\begin{cases}x=2 & \Rightarrow\ 3=-A \Rightarrow\ A=-3\\ x=3 & \Rightarrow\ 4=B\end{cases}$

Por tanto, la integral inicial queda: $\int\frac{x+1}{x^2-5x+6}dx=\int\frac{-3}{x-2}dx+\int\frac{4}{x-3}dx=-3\ln(x-2)+4\ln(x-3)+C$

b) $\int\frac{x}{x^2-2x+1}=\int\frac{x}{(x-1)^2}dx$

Se descompone el cociente de polinomios como suma de fracciones simples teniendo en cuenta que 1 es raíz doble del polinomio del denominador:

$$\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}\ \Rightarrow\ x=A(x-1)+B\ ;\ \begin{cases}x=1\Rightarrow 1=B\\ x=0\Rightarrow 0=-A+B\Rightarrow\ A=B=1\end{cases}$$

Por tanto, la integral inicial queda:

$$\int\frac{x}{x^2-2x+1}=\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx=\ln(x-1)+\int(x-1)^{-2}dx=\ln(x-1)+\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+C=\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}+C$$

c) $\int\frac{2}{x^3+4x^2}dx$, factorizando el polinomio del denominador queda $x^3+4x^2=x^2(x+4)$

Teniendo en cuenta que x=0 es una raíz doble y x=-4 es simple, la descomposición en fracciones simples de $\frac{2}{x^3+4x^2}$ es

$$\frac{2}{x^3+4x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+4}=\frac{Ax(x+4)+B(x+4)+Cx^2}{x^2(x+4)}\ \Rightarrow\ 2=Ax(x+4)+B(x+4)+Cx^2$$

Dando 3 valores a la variable x obtenemos un sistema de ecuaciones cuyas soluciones son las constantes a determinar:

$$\begin{cases} x = 0 \quad \Rightarrow 2 = 4B \Rightarrow \; B = \dfrac{1}{2} \\ x = -4 \Rightarrow 2 = C(-4)^2 \;\Rightarrow\; C = \dfrac{1}{8} \\ x = -1 \Rightarrow 2 = -3A + 3B + C \;\Rightarrow 3A = 3B + C - 2 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{8} - 2 = \dfrac{-3}{8} \;\Rightarrow\; A = -\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Por tanto, la integral inicial queda:

$$\int \frac{2}{x^3 + 4x^2}\,dx = \frac{-1}{8}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{B}{x^2}\,dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{x+4}\,dx = -\frac{1}{8}\ln x + \frac{1}{2}\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{1}{8}\ln(x+4) + C = \frac{1}{8}\ln x - \frac{1}{2x} + \frac{1}{8}\ln(x+4) + C$$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{5x^2 - 11x - 12}$

Se calculan las raíces del denominador para factorizarlo:

$$5x^2 - 11x - 12 = 0 \;, \qquad x = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 240}}{10} = \frac{11 \pm 19}{10} = \begin{cases} 3 \\ -\dfrac{4}{5} \end{cases} \text{, por tanto, } \; 5x^2 - 11x - 12 = 5(x-3)\left(x + \frac{4}{5}\right) = (x-3)(5x+4)$$

Se descompone $\dfrac{1}{5x^2 - 11x - 12}$ como suma de fracciones simples $\dfrac{1}{5x^2 - 11x - 12} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{5x+4} = \dfrac{A(5x+4) + B(x-3)}{(x-3)(5x+4)}$

Para determinar las constantes *A* y *B,* al ser iguales los denominadores se igualan los numeradores:

$$1 = A(5x+4) + B(x-3)$$

Dando dos valores a la variable x: $\begin{cases} x = 3 \quad \Rightarrow \; 1 = 19A \;\Rightarrow\; A = \dfrac{1}{19} \\ x = -\dfrac{4}{5} \;\Rightarrow\; 1 = -\dfrac{19}{5}B \;\Rightarrow\; B = \dfrac{-5}{19} \end{cases}$

Por tanto, la integral inicial queda:

$$\int \frac{dx}{5x^2 - 11x - 12} = \int \frac{dx}{(x-3)(5x+4)} = \int \frac{1}{19}\frac{dx}{x-3} + \int\left(-\frac{5}{19}\right)\frac{dx}{5x+4} = \frac{1}{19}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{19}\int \frac{5\,dx}{5x+4} = \frac{1}{19}\ln(x-3) - \frac{1}{19}\ln(5x+4) + C$$

Observación: En este ejercicio se ha considerado la descomposición en fracciones simples $\dfrac{1}{5x^2 - 11x - 12} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{5x+4}$ en lugar de $\dfrac{1}{5x^2 - 11x - 12} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x + \frac{4}{5}}$ para que sea más sencillo el cálculo de las constantes.