

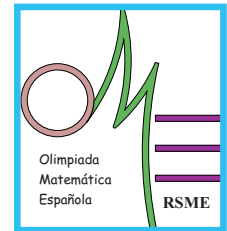


# XLVIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes mañana, 16 de diciembre de 2011



1. Dado un entero positivo  $n$ , hallar la suma de todos los enteros positivos inferiores a  $10n$  que no son múltiplos de 2 ni de 5.
2. Sea  $ABC$  un triángulo acutángulo con  $\hat{A} = 45^\circ$ , y sea  $P$  el pie de la altura por  $B$ . Trazamos la circunferencia de centro  $P$  que pasa por  $C$  y que vuelve a cortar a  $AC$  en el punto  $X$  y a la altura  $PB$  en el punto  $Y$ . Sean  $r$  y  $s$  las rectas perpendiculares a la recta  $AY$  por  $P$  y  $X$ , respectivamente, y  $L$ ,  $K$  las intersecciones de  $r$ ,  $s$  con  $AB$ . Demostrar que  $L$  es el punto medio de  $KB$ .
3. Los puntos  $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$  son los vértices de un polígono regular de  $2n + 1$  lados. Hallar el número de ternas  $A_i, A_j, A_k$  tales que el triángulo  $A_i A_j A_k$  es obtusángulo.

No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

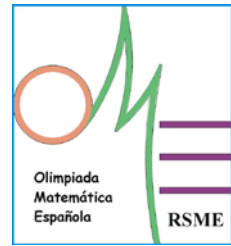


## XLVIII Olimpiada Matemática Española

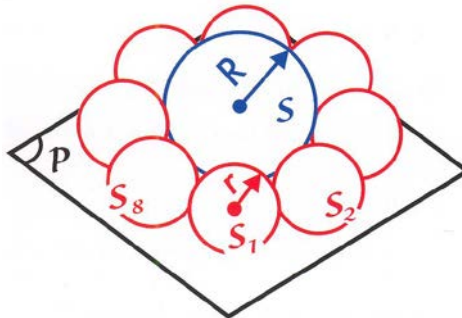
Primera Fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 16 de diciembre de 2011



4. Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  tres números reales positivos cuyo producto es 1. Demostrar que si la suma de estos números es mayor que la suma de sus recíprocos, entonces exactamente uno de ellos es mayor que 1.
5. En un triángulo rectángulo de hipotenusa unidad y ángulos respectivos de  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $90^\circ$ , se eligen 25 puntos cualesquiera. Demostrar que siempre habrá 9 entre ellos que podrán cubrirse con un semicírculo de radio  $3/10$ .
6. Sea  $S$  una esfera tangente a un plano  $P$ . Alrededor de  $S$  colocamos ocho esferas iguales  $S_1, S_2, \dots, S_8$ , tangentes entre sí, tangentes a  $S$  y tangentes a  $P$ . Llamamos  $R$  al radio de  $S$  y  $r$  al radio común de las ocho esferas. Calcular el valor de la razón  $\frac{r}{R}$ .



**No está permitido el uso de calculadoras.**

**Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.**

**El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**